

S. A. BOGATYI, E. A. KUDRYAVTSEVA, H. ZIESCHANG

ON INTERSECTIONS OF CLOSED CURVES ON SURFACES

The problem on the minimal number (with respect to deformation) of intersection points of two closed curves on a surface is solved. Following the Nielsen approach, we define classes of intersection points and essential classes of intersection points, which “are preserved under deformation” and whose total number is called the Nielsen number. If each Nielsen class consists of a unique point and has a non-vanishing index after a suitable deformation of the pair of curves, one says that *the Wecken property holds*. We compute the minimal number of intersection points in terms of the Nielsen numbers and the Reidemeister numbers. In particular, we prove that the Wecken property does not hold for some pairs of closed curves. Moreover, all the non-vanishing indices of the Nielsen classes equal ± 1 , while the non-vanishing Jezierski semi-indices equal 1. Similar questions are studied for the self-intersection problem of a curve on a surface.

С. А. БОГАТЫЙ, Е. А. КУДРЯВЦЕВА, Х. ЦИШАНГ

**О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ
НА ПОВЕРХНОСТЯХ****Аннотация**

This research was done during the visit and working of the third author at the Department of Mathematics and Mechanics of Moscow State M. V. Lomonosov University in 2001–2003. This visit was supported by the Stiftungsinitiative Johann Gottfried Herder. The first and second authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant nos. 09–01–00741-a and 10–01–00748-a), the Programme of the President of the Russian Federation for the Support of Leading Scientific Schools (grant nos. IIII-1562.2008.1 and IIII-3224.2010.1, the programme “Development of Scientific Potential in Higher Education” (grant no. 2.1.1.3704), and the federal target programme “Scientific and Scientific-Pedagogical Personnel of Innovative Russia” (grant no. 14.740.11.0794).

В работе решена задача о минимальном (относительно деформации) числе точек пересечения двух замкнутых кривых на поверхности. Следуя Нильсену, определяются классы точек пересечения и существенные классы точек пересечения, которые “сохраняются при деформации” и число которых называется числом Нильсена. Если все классы Нильсена состоят из одной точки и имеют ненулевой индекс после подходящей деформации пары кривых, говорят, что *выполнено свойство Векена*. Вычислено минимальное число точек пересечения в терминах чисел Нильсена и чисел Райдемайстера. В частности, мы доказываем, что свойство Векена выполнено не для любых пар замкнутых кривых. Более того, отличные от нуля индексы классов Нильсена равны ± 1 , а отличные от нуля полуиндексы Езерского равны 1. Такие же вопросы изучены для задачи о самопересечении кривой на поверхности.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение задачи о совпадении для пары отображений двумерного тора в поверхность [1] привело авторов к исследованию свойства Векена в задачах о пересечении и самопересечении замкнутых кривых на поверхностях, а также к исследованию некоторых топологических свойств (существенность, “специальность”, “тривиальность”) классов Нильсена точек пересечения и самопересечения. В данной работе мы полностью решаем задачи о пересечении и самопересечении замкнутых кривых на поверхностях. Ответы даются в терминах чисел Нильсена и чисел Райдемайстера задач о пересечении и самопересечении. В частности, мы показываем, что свойство Векена выполнено не для любых замкнутых кривых и пар замкнутых кривых.

Опишем *задачу о пересечении*. Даны два непрерывных отображения $f_1: X_1 \rightarrow Y$, $f_2: X_2 \rightarrow Y$ между топологическими пространствами. Возникает задача о нахождении представителей гомотопических классов этих отображений, у которых число точек пересечения минимально среди всех пар представителей классов $[f_1]$ и $[f_2]$. В частности, нужно найти *минимальное число точек пересечения гомотопических классов* $[f_1]$ и $[f_2]$:

$$MI[f_1, f_2] := \min_{f'_1 \simeq f_1, f'_2 \simeq f_2} |\text{int}(f'_1, f'_2)|,$$

где \simeq означает гомотопность отображений,

$$\text{int}(f_1, f_2) := \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid f_1(x_1) = f_2(x_2)\}.$$

Подчеркнем, что под *точкой пересечения* $(x_1, x_2) \in \text{int}(f_1, f_2)$ мы понимаем точку декартова произведения $X_1 \times X_2$, а не ее проекции на сомножители X_1 и X_2 и не их образ в Y . Для решения этой задачи, следуя подходу Я. Нильсена [2], разумно разбить множество точек пересечения отображений f_1 и f_2 на классы: две точки (x_1, x_2) , (x'_1, x'_2) пересечения принадлежат одному *классу Нильсена*, если существует пара путей $\alpha_i: [0, 1] \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, со свойствами

$$\alpha_i(0) = x_i, \quad \alpha_i(1) = x'_i, \quad i = 1, 2, \quad f_1 \circ \alpha_1 \simeq_{\partial} f_2 \circ \alpha_2.$$

Здесь \simeq_{∂} означает, что при гомотопии образы концов остаются на месте.

Если X_1, X_2, Y являются многообразиями размерностей $\dim X_i = n_i$ и $\dim Y = n = n_1 + n_2$, можно вести *индекс* изолированной точки пересечения. Например, для изолированной *точки пересечения* $(x_1^0, x_2^0) \in \text{int}(f_1, f_2)$ мы возьмем окрестности U_{X_1}, U_{X_2} и U_Y точек x_1^0, x_2^0 и $y^0 = f_1(x_1^0) = f_2(x_2^0)$ соответственно, так, что (x_1^0, x_2^0) является единственной точкой пересечения в $U_{X_1} \times U_{X_2}$ и $f_i(U_{X_i}) \subset U_Y$. Эти три окрестности отождествляются с единичными шарами $D^{n_i} \subset \mathbb{R}^{n_i}$ и $D^n \subset \mathbb{R}^n$ при помощи (сохраняющих ориентацию, если X_1, X_2 и Y ориентированы) гомеоморфизмов $U_{X_i} \rightarrow D^{n_i}$ и $U_Y \rightarrow D^n$, переводящих точки x_i^0 и y^0 в центры шаров, $i = 1, 2$. Степень отображения

$$\Gamma: \partial(D^{n_1} \times D^{n_2}) \cong S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}, \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{f_1(x_1) - f_2(x_2)}{|f_1(x_1) - f_2(x_2)|} \quad (1)$$

называется *индексом* $\text{ind}_{(x_1^0, x_2^0)}(f_1, f_2)$ *точки пересечения* (x_1^0, x_2^0) ; она не зависит от выбора окрестностей и меняет знак, если меняется ориентация в U_{X_1} или в U_{X_2} или в U_Y . (Если X_1 или X_2 или Y неориентируемо, индекс определяется по модулю 2.) Индекс можно определить для множеств точек пересечения; например, индекс конечного множества изолированных точек пересечения равен сумме индексов точек этого множества. Ю. Езерский [3, 4] определил *полуиндекс класса Нильсена* (для задачи о совпадении), см. определение 1 (d, e), который принимает значения в \mathbb{Z}_+ и является более тонким инвариантом, чем индекс, если X_1 или X_2 или Y неориентируемо. Если X_1, X_2 и Y ориентируемы, полуиндекс класса равен абсолютному значению индекса этого класса; если X_1 или X_2 или Y неориентируемо, индекс получается из полуиндекса проектированием \mathbb{Z}_+ в \mathbb{Z}_2 .

Класс Нильсена точек пересечения называется *существенным*, если его индекс не нуль. Число $NI[f_1, f_2]$ *существенных классов*

точек пересечения называется *числом Нильсена* пары f_1 и f_2 для задачи о пересечении. Существенный класс точек пересечения “сохраняется при гомотопии”, не меняя индекс. Поэтому число Нильсена $NI[f_1, f_2]$ является инвариантом пары гомотопических классов $[f_1]$, $[f_2]$. Ясно, что $MI[f_1, f_2] \geq NI[f_1, f_1]$. Если числа $MI[f_1, f_2]$ и $NI[f_1, f_2]$ совпадают, говорят, что выполняется *свойство Векена* [5] для задачи о пересечении пары f_1 и f_2 . В этом случае существуют отображения $f'_1 \simeq f_1$ и $f'_2 \simeq f_2$, для которых каждый класс Нильсена точек пересечения является существенным и содержит ровно одну точку. Отметим, что рассматриваемая во многих работах [6, 7, 8] задача о корнях для отображения $f_1: X_1 \rightarrow Y$ между многообразиями совпадает с задачей пересечения для пары отображений (f_1, f_2) , где $f_2: X_2 \rightarrow Y$ и X_2 одноточечно.

Важная теорема Добренъко и Кухарского [9] (см. также [10]) состоит в том, что для ориентируемых компактных многообразий размерностей $\dim X_1 = n_1$, $\dim X_2 = n_2$ и $\dim Y = n = n_1 + n_2$ любая пара непрерывных отображений обладает свойством Векена для задачи о пересечении в предположении $\max\{n_1, n_2\} \neq 2$. Последнее предположение нельзя отбросить, как показало решение задачи о корнях в размерности два [6, 7, 8], равносильной задаче о пересечении в размерностях $(n_1, n_2) = (2, 0)$. В размерностях $n_1 = n_2 = 2$ свойство Векена выполнено и доказывается аналогично случаю $n_1, n_2 \geq 3$ при помощи аналога трюка Уитни [11, 12, 13, 9, 10], при этом каждый двумерный “диск Уитни” имеет, вообще говоря, точки самопересечения и точки пересечения с $f_1(X_1)$ и $f_2(X_2)$, однако от этих пересечений можно избавиться при помощи деформации отображений f_1 и f_2 посредством “пальцевых движений” Кассона (при которой не возникают новые точки пересечения f_1 и f_2 , а лишь точки самопересечения). Интересно отметить, что для *задачи о совпадении* отображений между поверхностями, тесно связанной с задачей о пересечении в размерностях $n_1 = n_2 = 2$, свойство Векена не всегда выполнено [14, 15, 16, 7], и здесь выявление пар со свойством Векена удалось только в специальных случаях, например, когда отображения являются гомеоморфизмами [17, 18], или когда Y является сферой, проективной плоскостью или тором [19, 20, 21], или когда одно из отображений является константным (задача о корнях) [6, 7, 8], или когда X является тором [1].

С задачей о пересечении тесно связана *задача о самопересечении*. Для непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ между топологическими пространствами *множеством самопересечения* назовем множество $\text{int}(f) := \{(x_1, x_2) \in (X \times X) \setminus \Delta \mid f(x_1) = f(x_2)\}$, где $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ — диагональ. Аналогично возникает задача о

минимальном числе точек самопересечения гомотопического класса $[f]$:

$$MI[f] := \min_{f' \simeq f} |\text{int}(f')|.$$

Опять для изучения этой задачи разумно разбить точки самопересечения отображения f на классы: две точки (x_1, x_2) , (x'_1, x'_2) самопересечения принадлежат одному классу Нильсена, если существует пара путей $\alpha_1, \alpha_2: [0, 1] \rightarrow X$ со свойствами

$$\alpha_i(0) = x_i, \quad \alpha_i(1) = x'_i, \quad i = 1, 2, \quad f \circ \alpha_1 \simeq_{\partial} f \circ \alpha_2.$$

Понятия индекса точки самопересечения, существенного класса Нильсена, числа $NI[f]$ и свойства Векена для отображения замкнутого n -мерного многообразия X в $2n$ -мерное многообразие Y определяются как в задаче о пересечении. Подчеркнем, что *точка самопересечения* $(x_1, x_2) \in \text{int}(f)$ является упорядоченной парой (x_1, x_2) , т.е. элементом пространства $(X \times X) \setminus \Delta$. Рассмотрение неупорядоченной пары $\{x_1, x_2\}$, т.е. элемента пространства $(\text{exp}_2 X) \setminus X \cong ((X \times X) \setminus \Delta)/(x_1, x_2) \sim (x_2, x_1)$, дает другое понятие точки самопересечения. В настоящей работе такая точка самопересечения $\{x_1, x_2\}$ называется *геометрической точкой самопересечения*, а минимальное число геометрических точек самопересечения гомотопического класса $[f]$ обозначается через $MI_{\text{geom}}[f]$. Для геометрических точек самопересечения аналогично определяются эквивалентность по Нильсену, индекс, существенный класс Нильсена, число Нильсена $NI_{\text{geom}}[f]$ и свойство Векена.

Подчеркнем, что $\text{int}(f) \neq \text{int}(f, f)$, а лишь $\text{int}(f) \subset \text{int}(f, f)$. Кроме того, в задаче о пересечении для пары отображений (f, f) отображения $f_1 = f$ и $f_2 = f$ деформируются независимо, поэтому нет очевидной связи между числами $MI[f]$ и $MI[f, f]$, а также между числами $NI[f]$ и $NI[f, f]$.

Уитни доказал, что любое n -мерное замкнутое многообразие вложимо в \mathbb{R}^{2n} , и предложил метод, позволяющий доказать свойство Векена $MI[f] = NI[f]$ и $MI_{\text{geom}}[f] = NI_{\text{geom}}[f]$ в задаче о самопересечении для отображения n -мерного замкнутого многообразия X в $2n$ -мерное многообразие Y при $n \geq 3$ [22] (см. также [12, 13]). Этот метод называется *трюком Уитни* и применяется во многих работах [23]. При $n = 2$ существуют отображения, для которых свойство Векена не выполнено [24].

В теореме 1 и следствии 3 мы решаем задачу о самопересечении для замкнутой кривой на поверхности (случай $n = 1$) и даем критерий справедливости свойства Векена для заданной кривой. Мы также

доказываем, что отличные от нуля полуиндексы классов Нильсена точек самопересечения (и геометрических точек самопересечения) равны 1, и находим минимальное число классов Нильсена, являющихся существенными и/или специальными и/или тривиальными. Оказывается, что на связной поверхности выполнено свойство Векена для любой замкнутой кривой в том и только том случае, когда эта поверхность гомеоморфна плоскости, сфере или проективной плоскости (т.е. имеет конечную фундаментальную группу). Таким образом, свойство Векена для задачи о самопересечении при $n = 1$ не всегда справедливо.

В теореме 2 мы решаем задачу о пересечении для пары замкнутых кривых на поверхности (т.е. в размерностях $n_1 = n_2 = 1$) и даем критерий справедливости свойства Векена для такой пары кривых. Мы также доказываем, что отличные от нуля полуиндексы классов Нильсена точек пересечения равны 1, и находим минимальное число классов Нильсена, являющихся существенными и/или специальными. Оказывается, что на связной поверхности выполнено свойство Векена для любой пары замкнутых кривых в том и только том случае, когда эта поверхность ориентируема или гомеоморфна $\mathbb{R}P^2$. В частности, на любой неориентируемой связной поверхности, отличной от $\mathbb{R}P^2$, имеются пары кривых, которые не обладают свойством Векена для задачи о пересечении.

С помощью теорем 1(а) и 2 настоящей работы, включая утверждения о существенных, специальных и тривиальном классах Нильсена точек самопересечения и пересечения, авторами решена задача о совпадении для пар отображений двумерного тора в поверхность [1, теоремы 1.1 и 3.6]. Методы, используемые в настоящей работе, основаны на наблюдении Пуанкаре [25, с. 465-475], состоящем в том, что на компактной связной поверхности неположительной эйлеровой характеристики минимальное число точек (само)пересечения имеют кривые, являющиеся кратчайшими относительно гиперболической римановой метрики. Часть результатов настоящей статьи (см. теоремы 1 (а) и 2 (а)) была получена Тураевым и Виро [26] с использованием этого наблюдения. Для замкнутых кривых на ориентируемых поверхностях задачи о самопересечении и пересечении решены в работах [27, 28] в терминах классов эквивалентности точек (само)пересечения, целиком состоящих либо из классов Нильсена (для задачи о пересечении), либо из классов строгой эквивалентности по Нильсену (для задачи о самопересечении), где индексы классов принимают значения в \mathbb{Z} . Алгоритмы, выясняющие, можно ли продеформировать данные замкнутые кривые на поверхности в кривые без (само)пересечений, имеются в [29, 30, 31, 32, 33, 34].

В задачах о пересечении и самопересечении незамкнутых кривых с закрепленными концами на крае поверхности свойство Векена было доказано Тураевым [35], см. также [36, 37].

Результаты настоящей статьи и упомянутые выше результаты показывают, что в задаче о пересечении пары отображений $f_i: X_i^{n_i} \rightarrow Y^{n_1+n_2}$, $i = 1, 2$, $n_1 \leq n_2$, между замкнутыми многообразиями открытым остается только случай размерностей $(n_1, n_2) = (1, 2)$, а в задаче о самопересечении отображения $f: X^n \rightarrow Y^{2n}$ между многообразиями – только “двумерный” случай $n = 2$ (изучаемый, например, в [38]). По-видимому, нерешенными являются также задачи о *минимальном числе точек самопересечения регулярных кривых* на поверхности S среди регулярных кривых данного класса регулярной гомотопии, а также о нижней оценке числа самопересечения для нестягиваемых кривых, гомотопические классы которых принадлежат фиксированной подгруппе $H \subset \pi_1(S)$, например, $H = \langle\langle g \rangle\rangle$, нормальное замыкание элемента $g \in \pi_1(S)$.

Статья имеет следующее строение. В §2 даются основные определения задач пересечения и самопересечения в “одномерном” случае, а также мотивируется введение нами более тонких понятий, чем приведенные выше. В §3 решаются задачи о минимальном числе точек (само)пересечения для кривых на цилиндре и листе Мебиуса (леммы 2, 3 и следствия 1, 2). В §4 вводятся понятия специальных кривых и специальных пар кривых. В §5 и 6 решаются задачи о минимальном числе точек самопересечения и пересечения для замкнутых кривых на поверхностях (теоремы 1, 2 и следствие 3).

Авторы благодарны Д.Л. Гонсалвесу за указание на работу [4] и У. Кошорке за указание определения “строго эквивалентных” по Нильсену точек самопересечения кривых, см. определение 1 (b).

§ 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные понятия, введенные в данном разделе — это описанные в §1 понятия *эквивалентность по Нильсену* точек пересечения или самопересечения, *индекс* класса Нильсена, *существенный класс Нильсена*, *число Нильсена* и *свойство Векена*. Этих понятий достаточно для полного решения задач о пересечении и самопересечении замкнутых кривых на поверхности. Другие (более тонкие) понятия и инварианты не являются основными и введены нами для изучения следующих вопросов.

1) В работе [1] использованы без доказательства некоторые топологические свойства классов Нильсена точек пересечения и самопересечения. Для доказательства этих свойств мы вводим и изучаем

следующие классы Нильсена: (i) *специальные классы Нильсена* точек (само)пересечения; (ii) *тривиальный класс* Нильсена точек самопересечения.

2) Как показывают полученные нами ответы в задачах о самопересечении и пересечении (теоремы 1 и 2), свойство Векена невыполнено для некоторых замкнутых кривых и пар замкнутых кривых. Возникает задача об изучении тех классов Нильсена точек самопересечения или пересечения, которые содержат пары эквивалентных точек с противоположными индексами. Мы изучаем топологические свойства этих классов: показываем, что они являются (строго) специальными, см. определение 1 (с), и в случае точек самопересечения исследуем, сколько из этих классов являются (строго) геометрически специальными. Мы также изучаем геометрические свойства этих классов: вычисляем их индексы, полуиндексы и наименьшее число точек в каждом классе; выясняем, какие из них являются существенными, а какие (строго) дефективными.

3) Так как свойство Векена невыполнено (см. выше), представляется естественной задача о введении более тонкого отношения эквивалентности на множестве точек (само)пересечения, чем эквивалентность по Нильсену, а также более тонкого понятия индекса класса, и об изучении выполнения аналога свойства Векена для полученных более тонких инвариантов. В связи с этим мы вводим следующие понятия: (i) *строго эквивалентные по Нильсену* точки самопересечения; (ii) *полуиндекс* класса Нильсена точки (само)пересечения и необходимые для него понятия *самосокращающей точки (само)пересечения* и *дефективного* класса Нильсена; (iii) *геометрическая точка самопересечения*, *индекс* ее класса Нильсена (число Нильсена для геометрических точек самопересечения оказывается более тонким инвариантом, чем число Нильсена для точек самопересечения, см. замечание 2 и абзацы, расположенные до и после следствия 3) и естественно возникающее понятие *геометрически специальной* точки самопересечения; (iv) *полуиндекс* класса Нильсена геометрической точки самопересечения и необходимые для него понятия *самосокращающей* и *геометрически самосокращающей* точек самопересечения, *дефективного* класса геометрических точек самопересечения. Мы показываем, что соответствующие “более тонкие” числа Нильсена $NI^*[\gamma_1, \gamma_2]$ и $NI^*[\gamma]$, к сожалению, совпадают с обычными (рассмотренными в §1), поэтому даже для этих более тонких инвариантов аналог свойства Векена невыполнен.

Замкнутая кривая на многообразии называется *сохраняющей ориентацию*, если локальная ориентация многообразия сохраняется при непрерывном перенесении ориентации вдоль этой кривой. В против-

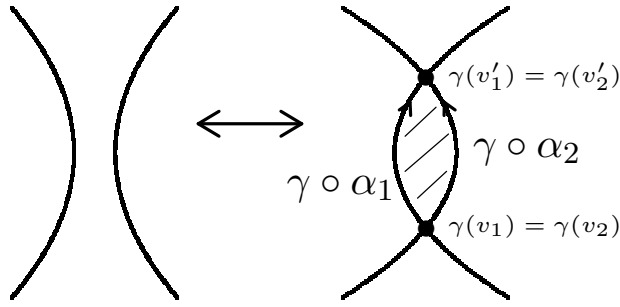


Рис. 1. Возникновение эквивалентных точек самопересечения

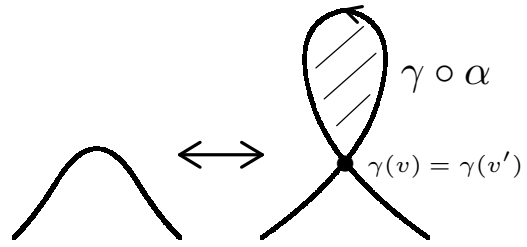


Рис. 2. Возникновение тривиальной точки самопересечения

ном случае замкнутая кривая называется *меняющей ориентацию*.

При общей деформации пары замкнутых кривых $\gamma_1, \gamma_2: S^1 \rightarrow S$ на поверхности S точки пересечения сохраняются, лишь слегка деформируясь, за исключением некоторых значений параметра гомотопии, при которых происходит возникновение/уничтожение пары точек (см. рис. 1). При общей деформации замкнутой кривой $\gamma: S^1 \rightarrow S$ возможно также возникновение/уничтожение одной точки самопересечения (см. рис. 2).

Окружность S^1 далее рассматривается как абелева группа \mathbb{R}/\mathbb{Z} , образ числа $t \in \mathbb{R}$ при проекции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ обозначается через \bar{t} .

О п р е д е л е н и е 1. (а) Назовем *точкой пересечения* кривых $\gamma_1, \gamma_2: S^1 \rightarrow S$ любую пару $(v_1, v_2) \in S^1 \times S^1$ со свойством $\gamma_1(v_1) = \gamma_2(v_2)$. Аналогично *точкой самопересечения* кривой $\gamma: S^1 \rightarrow S$ называется любая пара $(v_1, v_2) \in S^1 \times S^1$, $v_1 \neq v_2$, со свойством $\gamma(v_1) = \gamma(v_2)$. Через $MI[\gamma_1, \gamma_2]$ обозначим минимальное число точек пересечения кривых γ'_1 и γ'_2 среди всех пар кривых (γ'_1, γ'_2) , $\gamma'_i \simeq \gamma_i$. Минимальное число $MI[\gamma]$ точек самопересечения кривой γ определяется как минимальное число точек самопересечения среди всех кривых $\gamma' \simeq \gamma$.*

(b) Точки пересечения (v_1, v_2) и (v'_1, v'_2) кривых γ_1, γ_2 называют *эквивалентными по Нильсену*, если существуют пути $\alpha_i: [0, 1] \rightarrow S^1$, $i = 1, 2$, со свойствами

$$\alpha_i(0) = v_i, \quad \alpha_i(1) = v'_i, \quad \gamma_1 \circ \alpha_1 \simeq \gamma_2 \circ \alpha_2. \quad (2)$$

* В этом определении имеется своя тонкость, а именно, для точки самопересечения $(v_1, v_2) \in S^1 \times S^1$ кривой γ точка $(v_2, v_1) \in S^1 \times S^1$ тоже является точкой самопересечения этой же кривой, и обе точки учитываются в числе $MI[\gamma]$, хотя их образы в S совпадают.

Аналогично точки самопересечения (v_1, v_2) и (v'_1, v'_2) кривой γ назовем *эквивалентными по Нильсену*, если они являются эквивалентными по Нильсену точками пересечения пары кривых γ, γ . Если при этом $\alpha_1(t) \neq \alpha_2(t)$ для любого $t \in [0, 1]$, то точки самопересечения (v_1, v_2) и (v'_1, v'_2) назовем *строго эквивалентными по Нильсену*. Строго эквивалентные точки самопересечения показаны на рис. 1 справа.

Точка самопересечения (v_1, v_2) называется *тривиальной* или *эквивалентной нулю*, если существует путь $\alpha: [0, 1] \rightarrow S^1$ со свойствами

$$\alpha(0) = v_1, \quad \alpha(1) = v_2, \quad \gamma \circ \alpha \simeq_{\partial} 0.$$

Тривиальная точка самопересечения показана на рис. 2 справа. Тривиальные точки самопересечения образуют класс Нильсена, который будем называть *тривиальным классом Нильсена*; он может быть пустым.

Точку самопересечения (v_1, v_2) кривой γ назовем *геометрически специальной*, если она эквивалентна точке (v_2, v_1) . Если при этом соответствующая петля $\gamma \circ \alpha_1$ сохраняет ориентацию для некоторой пары путей α_1, α_2 в (2), точку самопересечения назовем *геометрически самосокращающей*.

(с) Следуя [1, определение 2.2 (с, d)], мы назовем точку пересечения (v_1, v_2) кривых γ_1, γ_2 *специальной*[†], если существует пара чисел $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) \neq (0, 0)$, такая, что замкнутые пути

$$\delta_1(t) := \gamma_1(v_1 + \overline{pt}) \quad \text{и} \quad \delta_2(t) := \gamma_2(v_2 + \overline{qt}), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

гомотопны относительно концов на поверхности S . Если при этом петля δ_1 меняет ориентацию для некоторой пары p, q , точка пересечения называется *самосокращающей* (этот термин введен в [4] для задачи о совпадении). Можно показать, что точка, эквивалентная специальной или самосокращающей, тоже является специальной или самосокращающей соответственно; поэтому корректно определены *специальные классы Нильсена* и *дефективные классы Нильсена* точек пересечения (класс Нильсена называется *дефективным*, если он состоит из самосокращающих точек [4]).

[†] Определение специальной точки пересечения допускает следующую переформулировку: точка пересечения является *неспециальной* в том и только том случае, когда для любой эквивалентной ей точки гомотопический класс (относительно концов) каждого пути α_i на S^1 из определения 1 (b) определен однозначно, $i = 1, 2$, т.е. не зависит от выбора пары путей α_1, α_2 .

Точку самопересечения кривой γ , а также ее класс Нильсена, назовем *специальной*, если она является специальной точкой пересечения пары кривых γ, γ . Аналогично точку самопересечения кривой γ назовем *самосокращающей*, а ее класс Нильсена *дефективным*, если она является самосокращающей точкой пересечения пары кривых γ, γ .

Если в определении специальной (соответственно геометрически специальной) точки самопересечения наложить условие $p = q \neq 0$ (соответственно условие строгой эквивалентности), получим понятия *строго специальной*, *строго самосокращающей* (соответственно *строго геометрически специальной*, *строго геометрически самосокращающей*) точек самопересечения. Можно показать, что если точка самопересечения является строго специальной (соответственно строго самосокращающей, строго геометрически специальной, строго геометрически самосокращающей), то все точки ее класса Нильсена тоже являются таковыми; поэтому корректно определены *строго специальные* классы Нильсена, *строго дефективные* классы Нильсена (т.е. состоящие из строго самосокращающих точек) и *строго геометрически специальные* классы Нильсена точек самопересечения.

(d) *Индекс* изолированной точки и класса точек пересечения кривых $\gamma_1, \gamma_2: S^1 \rightarrow S$ на поверхности S определим как в (1) для $X_1 = X_2 = S^1$, $Y = S$.[‡] Индекс класса Нильсена точек пересечения принимает значения или в группе \mathbb{Z} в случае ориентированной поверхности S , или в группе $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ в случае неориентируемой поверхности S (а также в случае *индекса по модулю 2*), или в $\mathbb{Z}_+ = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq 0\}$ в случае так называемого *полуиндекса* [3, 4], определенного чуть ниже. Класс Нильсена точек пересечения называется *существенным*, если его индекс не нуль; *число Нильсена* $NI[\gamma_1, \gamma_2]$ точек пересечения является числом существенных классов. Число классов Нильсена, имеющих ненулевой полуиндекс, обозначим через $NI^*[\gamma_1, \gamma_2]$. Ясно, что

$$MI[\gamma_1, \gamma_2] \geq NI^*[\gamma_1, \gamma_2] \geq NI[\gamma_1, \gamma_2].$$

Если числа $MI[\gamma_1, \gamma_2]$ и $NI[\gamma_1, \gamma_2]$ совпадают, мы скажем, что выполняется *свойство Векена для задачи о пересечении* (см. замечание 2 ниже).

[‡]Можно показать, что индекс изолированной точки пересечения кривых равен 0, если в этой точке пересечение несобственное, т.е. устранимо малым шевелением кривых. В случае собственного пересечения индекс точки (t_1, t_2) равен 1, если положительная полуветвь $\gamma_2|_{(t_2, t_2+\varepsilon)}$ второй кривой лежит “слева” от ветви $\gamma_1|_{(t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon)}$ первой кривой, и равен -1 в противном случае. Здесь ε – малое положительное число.

Если класс Нильсена дефективен (см. (с)), его *полуиндекс* определяется как образ $\bmod 2$ -индекса при вложении $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_+$, переводящем $2\mathbb{Z} \mapsto 0$, $1 + 2\mathbb{Z} \mapsto 1$. Для недефективного класса Нильсена точек пересечения кривых γ_1, γ_2 , состоящего из изолированных точек пересечения, *полуиндекс* определяется как абсолютное значение суммы индексов точек пересечения из этого класса, где индексы точек пересечения определяются при помощи “согласованных” локальных ориентаций поверхности. А именно, локальная ориентация в точке $\gamma_1(v'_1) = \gamma_2(v'_2)$, с помощью которой определяется индекс точки пересечения (v'_1, v'_2) , получается из локальной ориентации в точке $\gamma_1(v_1) = \gamma_2(v_2)$, с помощью которой определяется индекс точки пересечения (v_1, v_2) , перенесением вдоль соответствующего пути $\gamma_1 \circ \alpha_1$, см. (2). Полуиндекс класса Нильсена не зависит от выбора пары путей α_i из (b) в силу недефективности этого класса.

Для замкнутой кривой γ на S таким же путем определяются понятия *индекса* нетривиального (см. (b)) класса Нильсена точек самопересечения (индекс тривиального класса полагается равным нулю), *существенного класса* точек самопересечения, *числа Нильсена* $NI[\gamma]$ точек самопересечения, *свойства Векена для задачи о самопересечении*. *Полуиндекс* нетривиального класса Нильсена точек самопересечения определяется с использованием понятия дефективного класса точек самопересечения. При рассмотрении классов строгой эквивалентности по Нильсену точек самопересечения (см. (b)) получаются аналогичные понятия, при этом для определения *полуиндекса* класса строгой эквивалентности используется понятие строго дефективного класса Нильсена точек самопересечения, см. (с). Число классов строгой эквивалентности по Нильсену, имеющих ненулевой полуиндекс, обозначим через $NI^*[\gamma]$. Конечно,

$$MI[\gamma] \geq NI^*[\gamma] \geq NI[\gamma]$$

и числа Нильсена $NI[\gamma]$ и $NI^*[\gamma]$ являются инвариантами свободного гомотопического класса замкнутой кривой.

(е) Пусть (v_1, v_2) — точка самопересечения кривой γ . Неупорядоченную пару $\{v_1, v_2\}$ назовем *геометрической точкой самопересечения* γ . Геометрические точки самопересечения $\{v_1, v_2\}$ и $\{v'_1, v'_2\}$ назовем *эквивалентными по Нильсену*, если точка (v_1, v_2) эквивалентна (v'_1, v'_2) или (v'_2, v'_1) . *Индекс* геометрической точки самопересечения и ее класса Нильсена определим по модулю 2 (т.е. индекс геометрической точки равен 1, если самопересечение собственное, и индекс равен 0, если самопересечение несобственное). Обозначим через $MI_{\text{geom}}[\gamma]$ минимальное число геометрических точек самопересечения кривой γ' среди всех кривых $\gamma' \simeq \gamma$ (очевидно,

$MI_{\text{geom}}[\gamma] = \frac{1}{2}MI[\gamma]$); через $NI_{\text{geom}}[\gamma]$ – число существенных классов Нильсена геометрических точек самопересечения γ .

Полуиндекс класса Нильсена геометрических точек самопересечения определим аналогично (d). А именно, класс Нильсена геометрической точки самопересечения $\{v_1, v_2\}$ назовем *дефективным*, если точка самопересечения (v_1, v_2) является самосокращающей или геометрически самосокращающей (см. (b, c)). Для дефективных классов определим полуиндекс при помощи mod 2-индекса, а для недефективных классов определим полуиндекс так. Полуиндекс класса Нильсена геометрической точки самопересечения $\{v_1, v_2\}$ определяется либо как полуиндекс класса Нильсена точки самопересечения (v_1, v_2) (см. (d)), если точка (v_1, v_2) не является геометрически специальной (см. (b)), либо как половина этого полуиндекса, если точка (v_1, v_2) является геометрически специальной.

Аналогично определяются классы *строго эквивалентных по Нильсену* геометрических точек самопересечения; *индекс* такого класса определяется по модулю 2, а *полуиндекс* определяется так. Класс Нильсена геометрической точки самопересечения $\{v_1, v_2\}$ назовем *строго дефективным*, если точка самопересечения (v_1, v_2) является строго самосокращающей или строго геометрически самосокращающей, см. (c). Если класс строгой эквивалентности геометрической точки самопересечения $\{v_1, v_2\}$ строго дефективен, его *полуиндекс* определяется при помощи mod 2-индекса. Если этот класс не является строго дефективным, его *полуиндекс* определяется либо как полуиндекс класса строгой эквивалентности точки самопересечения (v_1, v_2) (см. (d)), если точка (v_1, v_2) не является строго геометрически специальной (см. (c)), либо как половина этого полуиндекса, если точка (v_1, v_2) является строго геометрически специальной. Число классов строгой эквивалентности геометрических точек, имеющих ненулевой полуиндекс, обозначим через $NI_{\text{geom}}^*[\gamma]$. Конечно,

$$MI_{\text{geom}}[\gamma] \geq NI_{\text{geom}}^*[\gamma] \geq NI_{\text{geom}}[\gamma]$$

и геометрические числа Нильсена $NI_{\text{geom}}[\gamma]$ и $NI_{\text{geom}}^*[\gamma]$ являются инвариантами свободного гомотопического класса замкнутой кривой.

Определения 1 (b, c) *эквивалентных* точек (само)пересечения, *специальной* и *самосокращающей* точек (само)пересечения, а также *тривиальной*, *геометрически специальной* и *геометрически самосокращающей* точек самопересечения и их “строгих” аналогов допускают следующую переформулировку.

Л е м м а 1. Пусть $\gamma, \gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \rightarrow S$ — замкнутые кривые.

(а) Каждой точке пересечения (v_1, v_2) кривых γ_1 и γ_2 , $v_1, v_2 \in [0, 1)$, сопоставим путь $\gamma_{v_1, v_2} = \gamma_1|_{[0, v_1]} \gamma_2|_{[0, v_2]}^{-1}$, ведущий из точки $\gamma_1(0)$ в точку $\gamma_2(0)$ на S . Тогда верны следующие критерии:

$$(v_1, v_2), (v'_1, v'_2) \text{ эквивалентны} \iff \exists p, q \in \mathbb{Z} : \gamma_{v_1, v_2} \simeq_{\partial} \gamma_1^p \gamma_{v'_1, v'_2} \gamma_2^q;$$

$$(v_1, v_2) \text{ специальна} \iff \exists (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\} : \gamma_{v_1, v_2} \simeq_{\partial} \gamma_1^p \gamma_{v_1, v_2} \gamma_2^q;$$

$$(v_1, v_2) \text{ самосокр.} \iff (v_1, v_2) \text{ специальна и } \gamma_1^p \text{ меняет ориентацию.}$$

(б) Каждой точке самопересечения (v_1, v_2) кривой γ , $v_1, v_2 \in [0, 1)$, сопоставим замкнутый путь $\gamma_{v_1, v_2} := \gamma|_{[0, v_1]} \gamma|_{[0, v_2]}^{-1}$ на S . Тогда $\gamma_{v_1, v_2} \simeq_{\partial} \gamma_{v_2, v_1}^{-1}$ и верны следующие критерии:

$$(v_1, v_2), (v'_1, v'_2) \text{ эквивалентны} \iff \exists p, q \in \mathbb{Z} : \gamma_{v_1, v_2} \simeq_{\partial} \gamma^p \gamma_{v'_1, v'_2} \gamma^q;$$

$$(v_1, v_2) \text{ тривиальна} \iff \gamma_{v_1, v_2} \simeq_{\partial} \gamma^p \text{ для некоторого } p \in \mathbb{Z};$$

$$(v_1, v_2) \text{ специальна} \iff \exists (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\} : \gamma_{v_1, v_2} \simeq_{\partial} \gamma^p \gamma_{v_1, v_2} \gamma^q;$$

$$(v_1, v_2) \text{ геом. специальна} \iff \exists p, q \in \mathbb{Z} : \gamma_{v_1, v_2} \simeq_{\partial} \gamma^p \gamma_{v_1, v_2}^{-1} \gamma^q;$$

$$(v_1, v_2) \text{ самосокр.} \iff (v_1, v_2) \text{ специальна и } \gamma^q \text{ меняет ориентацию;}$$

$$(v_1, v_2) \text{ геом. самосокр.} \iff \left\{ \begin{array}{l} (v_1, v_2) \text{ геом. специальна и} \\ \gamma^{-q} \gamma_{v_1, v_2} \text{ сохраняет ориентацию;} \end{array} \right.$$

$$(v_1, v_2), (v'_1, v'_2) \text{ эквивалентны}^* \iff \exists q \in \mathbb{Z} : \gamma_{v_1, v_2} \simeq_{\partial} \gamma^{-q} \gamma_{v'_1, v'_2} \gamma^q;$$

$$(v_1, v_2) \text{ специальна}^* \iff \exists q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \gamma_{v_1, v_2} \simeq_{\partial} \gamma^{-q} \gamma_{v_1, v_2} \gamma^q;$$

$$(v_1, v_2) \text{ геом. специальна}^* \iff \exists q \in \mathbb{Z} : \gamma_{v_1, v_2} \simeq_{\partial} \gamma^{\eta-q} \gamma_{v_1, v_2}^{-1} \gamma^q;$$

$$(v_1, v_2) \text{ самосокр.}^* \iff (v_1, v_2) \text{ специальна}^* \text{ и } \gamma^q \text{ меняет ориент.};$$

$$(v_1, v_2) \text{ геом. самосокр.}^* \iff \left\{ \begin{array}{l} (v_1, v_2) \text{ геом. специальна}^* \text{ и} \\ \gamma^{-q} \gamma_{v_1, v_2} \text{ сохраняет ориентацию,} \end{array} \right.$$

где последние пять критериев относятся к строго эквивалентным по Нильсену точкам самопересечения и соответствующим понятиям: строго специальной, строго геометрически специальной и т.п. точкам самопересечения, где звездочка $*$ означает “строго”. Здесь $\eta := \text{sgn}(v_2 - v_1)$, $\eta_i := \text{sgn}(v'_i - v_i + \varepsilon)$, $i = 1, 2$, $0 < \varepsilon \ll 1$,

$\hat{q} := q + (\eta_1 - \eta_2)/2 - 1$ в случае расположения точек на отрезке $[0, 1]$ в циклическом порядке v_1, v'_1, v'_2, v_2 (возможно $v_1 = v'_1$), $\hat{q} := q + (\eta_1 - \eta_2)/2 + 1$ при расположении точек в обратном циклическом порядке (возможно $v_2 = v'_2$), $\hat{q} := q + (\eta_1 - \eta_2)/2$ в остальных случаях. \square

В настоящей работе нам понадобятся лишь критерии эквивалентности точек (само)пересечения (см. первую формулу леммы 1 (a, b)), доказательство которых не представляет труда. Переформулировки остальных понятий приведены в лемме 1 для полноты изложения.

Пример. Из леммы 1 легко видно, что тривиальная точка самопересечения кривой γ является специальной, строго специальной, геометрически специальной и геометрически самосокращающей. Тривиальная точка является строго геометрически специальной (соответственно строго геометрически самосокращающей, самосокращающей, строго самосокращающей) тогда и только тогда, когда кривая γ стягиваема (соответственно стягиваема, меняет ориентацию, меняет ориентацию).

Замечание 1. Инволюция $(v_1, v_2) \mapsto (v_2, v_1)$ на множестве $\text{int}(\gamma)$ точек самопересечения переводит классы Нильсена в классы Нильсена, поэтому она индуцирует инволюцию на множестве классов Нильсена точек самопересечения. Эта инволюция переводит существенные классы Нильсена в существенные, специальные в специальные, дефективные в дефективные, а тривиальный класс оставляет на месте. Заметим, что любой класс, оставляемый инволюцией на месте, является $\text{mod } 2$ -несущественным (так как точки в таком классе возникают парами: $(v_1, v_2) \sim (v_2, v_1)$). Поэтому геометрически специальные (т.е. инвариантные относительно инволюции $\text{int}(\gamma) \rightarrow \text{int}(\gamma)$, $(v_1, v_2) \mapsto (v_2, v_1)$) классы Нильсена точек самопересечения не являются $\text{mod } 2$ -существенными. Отметим, что тривиальный класс по нашему определению несуществен.

Замечание 2. Если отличные от нуля полуиндексы классов Нильсена равны 1 (что, в действительности, имеет место по теоремам 1 и 2), то понятие существенного класса Нильсена (а потому и число Нильсена) совпадает для рассмотренных в определении 1 (d) трех типов индекса. Для чисел Нильсена, определенных с помощью индексов в группе \mathbb{Z}_2 , легко проверяется цепочка неравенств

$$MI[\gamma] = 2MI_{\text{geom}}[\gamma] \geq 2NI_{\text{geom}}[\gamma] \geq NI[\gamma] \quad (3)$$

(последнее неравенство следует из того, что $\text{mod } 2$ -существенные классы точек самопересечения не инвариантны относительно инволюции $(v_1, v_2) \mapsto (v_2, v_1)$, см. замечание 1). Значит, для любой

замкнутой кривой γ , обладающей свойством Векена $MI[\gamma] = NI[\gamma]$ для точек самопересечения, верно равенство $NI[\gamma] = 2NI_{\text{geom}}[\gamma]$ и выполнено *свойство Векена для геометрических точек самопересечения*: $MI_{\text{geom}}[\gamma] = NI_{\text{geom}}[\gamma]$.

О п р е д е л е н и е 2. (а) *Классами Райдемайстера* замкнутой кривой γ назовем двусторонние смежные классы $Z_\gamma g Z_\gamma$, $g \in \pi_1(S, \gamma(0))$, группы $\pi_1(S, \gamma(0))$ по циклической подгруппе Z_γ , порожденной гомотопическим классом кривой γ . Число $RI[\gamma]$ классов Райдемайстера назовем *числом Райдемайстера для самопересечения* замкнутой кривой γ . Подмножества вида $(Z_\gamma g Z_\gamma) \cup (Z_\gamma g^{-1} Z_\gamma)$ группы $\pi_1(S, \gamma(0))$ назовем *геометрическими классами Райдемайстера для самопересечения* замкнутой кривой γ . Число геометрических классов Райдемайстера обозначим через $RI_{\text{geom}}[\gamma]$.

(б) Для задачи о пересечении можно ввести похожие понятия: *Классы Райдемайстера пары замкнутых кривых* γ_1, γ_2 с $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ являются двусторонними смежными классами $Z_{\gamma_1} g Z_{\gamma_2}$ по циклическим подгруппам $Z_{\gamma_1}, Z_{\gamma_2}$. Число $RI[\gamma_1, \gamma_2]$ классов Райдемайстера назовем *числом Райдемайстера для пересечения* замкнутых кривых γ_1, γ_2 .

Из первой формулы леммы 1 (а, б) следует, что для любой пары кривых γ'_1, γ'_2 , такой, что $\gamma'_1 \simeq \gamma_1$, $\gamma'_2 \simeq \gamma_2$ и $\gamma'_1(0) = \gamma'_2(0)$, имеется взаимно-однозначное соответствие между классами Нильсена точек пересечения γ'_1, γ'_2 и некоторыми классами Райдемайстера пары кривых γ_1, γ_2 . Аналогично, для любой кривой $\gamma' \simeq \gamma$ имеется взаимно-однозначное соответствие между классами Нильсена точек самопересечения γ' и некоторыми классами Райдемайстера кривой γ , и аналогично для геометрических классов. Следовательно,

$$NI[\gamma] \leq RI[\gamma], \quad NI[\gamma_1, \gamma_2] \leq RI[\gamma_1, \gamma_2], \quad NI_{\text{geom}}[\gamma] \leq RI_{\text{geom}}[\gamma].$$

§ 3. ЗАМКНУТЫЕ КРИВЫЕ НА ЦИЛИНДРЕ И ЛИСТЕ МЕБИУСА

Для $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$\delta(k) := \frac{(-1)^k + 1}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ 1, & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases} \quad (4)$$

Следующие леммы показывают, что свойство Векена может нарушаться в задачах о точках пересечения и самопересечения кривых на цилиндре и листе Мебиуса. Эти леммы являются ключевыми в доказательстве теорем 1 (б) и 2 (б).

Л е м м а 2. Пусть $\gamma, \gamma_1, \gamma_2: S^1 \rightarrow C$ – замкнутые кривые на цилиндре $C = S^1 \times [-1, 1]$, и пусть $k = \deg(\rho \circ \gamma) \neq 0$, $k_i = \deg(\rho \circ \gamma_i)$, где $\rho: C \rightarrow S^1$ – проекция. Тогда любой класс Нильсена точек самопересечения или пересечения несуществен (и даже недефективен и имеет полуиндекс 0), и

$$MI[\gamma] = 2|k| - 2, \quad NI^*[\gamma] = NI[\gamma] = 0, \quad RI[\gamma] = |k|;$$

$$MI[\gamma_1, \gamma_2] = NI^*[\gamma_1, \gamma_2] = NI[\gamma_1, \gamma_2] = 0,$$

$$RI[\gamma_1, \gamma_2] = \begin{cases} \infty, & \text{если } k_1 = k_2 = 0, \\ \gcd(k_1, k_2), & \text{если } |k_1| + |k_2| > 0. \end{cases}$$

Более того, кривая γ имеет не менее $|k| - 1$ классов Нильсена точек самопересечения, каждый из которых не совпадает с тривиальным и содержит не менее двух (строго эквивалентных, см. определение 1 (b)) точек самопересечения, хотя несуществен (и даже недефективен и имеет полуиндекс 0); в точности $\delta(k)$ из этих классов является геометрически специальным (и даже состоящим из строго геометрически самосокращающих точек), см. определение 1 (b, c) и (4).

С л е д с т в и е 1. В условиях леммы 2 для замкнутой кривой $\gamma: S^1 \rightarrow C$ на цилиндре отличные от нуля полуиндексы классов геометрических точек самопересечения равны 1 и

$$MI_{\text{geom}}[\gamma] = |k| - 1, \quad NI_{\text{geom}}^*[\gamma] = NI_{\text{geom}}[\gamma] = \delta(k),$$

$$RI_{\text{geom}}[\gamma] = \left\lfloor \frac{|k|}{2} \right\rfloor + 1.$$

Более того, кривая γ имеет не менее $\left\lfloor \frac{|k|}{2} \right\rfloor$ классов Нильсена геометрических точек самопересечения, отличных от тривиального; в точности $\delta(k)$ из этих классов является (строго) геометрически специальным (он существен и строго дефективен), а каждый из остальных $\left\lfloor \frac{|k|-1}{2} \right\rfloor$ классов содержит не менее двух (строго эквивалентных) геометрических точек, хотя несуществен (и даже недефективен и имеет полуиндекс 0). \square

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Так как разные кривые можно “развести” на разные компоненты края цилиндра, $MI[\gamma_1, \gamma_2] = 0$. Следовательно, $NI[\gamma_1, \gamma_2] = 0$. Так как группа $\pi_1(C) = \mathbb{Z}$ абелева, число Райдемайстера $RI[\gamma_1, \gamma_2]$ равно числу элементов факторгруппы группы \mathbb{Z} по подгруппе, порожденной числами k_1, k_2 . Отсюда следует, что $RI[\gamma_1, \gamma_2] = \gcd(k_1, k_2)$ при $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$, $RI[\gamma_1, \gamma_2] = \infty$

для $k_1 = k_2 = 0$. Решение задачи о самопересечении разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Рассмотрим какую-нибудь кривую $\gamma' \simeq \gamma$, имеющую $MI[\gamma]$ точек самопересечения, т.е. минимальное число точек самопересечения. Каждую кривую γ' на цилиндре, имеющую конечное число точек самопересечения, можно продеформировать — с сохранением точек самопересечения и их разбиения на классы Нильсена — так, чтобы точки $\gamma'(0)$ и $\gamma'(1/2)$ принадлежали разным компонентам края цилиндра. Поэтому мы можем и будем считать, что точки $\gamma'(0)$ и $\gamma'(1/2)$ принадлежат разным компонентам края цилиндра. Кривая γ' состоит из двух незамкнутых дуг $\delta_1 := \gamma'|_{[0,1/2]}$ и $\delta_2 := \gamma'|_{[1/2,1]}$, где начало одной дуги является концом другой и наоборот, и эти точки принадлежат разным компонентам края цилиндра.

Для вычисления минимального числа $MI[\gamma]$ точек самопересечения кривой γ рассмотрим задачу о минимальном числе $MI[\delta_1, \delta_2]$ точек пересечения дуг δ'_1, δ'_2 в гомотопических классах дуг δ_1, δ_2 с фиксированными концами; в процессе гомотопии концы дуг остаются неподвижными и, в частности, принадлежащими краю цилиндра. Заметим, что $\delta_1 \not\sim \delta_2$, так как $k \neq 0$. Известно, что в этой задаче о пересечении справедливо свойство Векена, а минимальное число точек пересечения в данных классах гомотопии имеют кривые, являющиеся кратчайшими относительно некоторой плоской римановой метрики на цилиндре, см., например, [35, теорема II] или [36, theorem 2.11], где $MI[\delta_1, \delta_2] = k(\delta_1, \delta_2)$, $NI[\delta_1, \delta_2] = |\lambda(\delta_1, \delta_2)| = |\tilde{\lambda}(\delta_1, \delta_2)|$. Отсюда легко находим

$$MI[\delta_1, \delta_2] = NI[\delta_1, \delta_2] = |k| + 1.$$

Следовательно, дуги δ_1 и δ_2 имеют не менее $|k|+1$ точек пересечения, из которых две точки $(0, 1)$ и $(1/2, 1/2)$ отвечают концам дуг. Так как любой точке пересечения кроме указанных двух точек отвечает пара точек самопересечения кривой γ' , то $MI[\gamma] = 2(MI[\delta_1, \delta_2] - 2)$. Отсюда следует требуемое равенство $MI[\gamma] = 2(|k| - 1)$.

Шаг 2. Для вычисления числа Нильсена $NI[\gamma]$ сопоставим каждой точке самопересечения (v_1, v_2) кривой γ замкнутый путь $\gamma_{v_1, v_2} = \gamma|_{[0, v_1]} \cdot \gamma|_{[0, v_2]}^{-1}$ и целое число $g_{v_1, v_2} := \deg(\rho \circ \gamma_{v_1, v_2})$, где $\rho: C \rightarrow S^1$ — проекция. С учетом первой формулы леммы 1 (b) и изоморфизма $\rho_\#: \pi_1(C) \rightarrow \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, точки самопересечения (v_1, v_2) и (v'_1, v'_2) эквивалентны в том и только том случае, когда $k \mid (g_{v_1, v_2} - g_{v'_1, v'_2})$. Следовательно, классы Нильсена точек самопересечения (v_1, v_2) кривой γ находятся во взаимно-однозначном

соответствии с образами чисел g_{v_1, v_2} при проекции $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/|k|\mathbb{Z}$, $i \mapsto i \bmod |k|$.

Рассмотрим кратчайшие дуги δ'_1, δ'_2 в гомотопических классах

$$\delta'_1 \simeq_{\partial} \delta_1, \quad \delta'_2 \simeq_{\partial} \delta_2$$

относительно какой-нибудь плоской римановой метрики на цилиндре. Соответствующая замкнутая кривая $\gamma' = \delta'_1 \cdot \delta'_2$ имеет $2(|k| - 1)$ точек самопересечения; отвечающие им $2(|k| - 1)$ чисел g_{v_1, v_2} образуют множество $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(|k| - 1)\}$; при этом точка, отвечающая числу $\pm i$, имеет индекс ± 1 при подходящем выборе ориентации цилиндра. Так как указанное множество чисел распадается на пары чисел вида $\{i, -(|k| - i)\}$, равных в группе $\mathbb{Z}/|k|\mathbb{Z}$, то отвечающие каждой паре чисел точки самопересечения кривой γ' образуют класс Нильсена и имеют противоположные индексы. Поэтому все классы Нильсена несущественны, т.е. $NI[\gamma] = 0$. Так как цилиндр ориентируем, все классы недефективны, а потому имеют полуиндекс 0.

Шаг 3. Покажем, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, |k| - 1\}$ кривая γ имеет не менее двух точек самопересечения в классе Нильсена, отвечающем элементу $i \bmod |k| \in \mathbb{Z}/|k|\mathbb{Z}$, см. шаг 2. Как на шаге 1, каждую (но уже не обязательно имеющую $MI[\gamma]$ точек самопересечения) кривую $\gamma'' \simeq \gamma$, имеющую конечное число точек самопересечения, можно продеформировать — с сохранением точек самопересечения и их разбиения на классы Нильсена — так, чтобы точки $\gamma''(0)$ и $\gamma''(1/2)$ принадлежали разным компонентам ∂C , после чего можно разбить ее на две (не обязательно простые) дуги: $\gamma'' = \delta''_1 \cdot \delta''_2$. Каждая точка самопересечения кривой γ'' отвечает либо точке самопересечения одной из дуг δ''_1 или δ''_2 , либо точке пересечения ровно одной из пар дуг (δ''_1, δ''_2) или (δ''_2, δ''_1) ; эквивалентным точкам пересечения любой из пар дуг отвечают эквивалентные (и даже строго эквивалентные) точки самопересечения кривой γ'' .

Аналогично шагу 2 любой точке пересечения (v_1, v_2) пары дуг δ''_1, δ''_2 сопоставим замкнутый путь $\delta_{v_1, v_2} = \delta''_1|_{[0, v_1]} \cdot \delta''_2|_{[1/2, v_2]}^{-1}$ и целое число $g_{v_1, v_2} := \deg(\rho \circ \delta_{v_1, v_2})$. Известно [36], что точки пересечения (v_1, v_2) и (v'_1, v'_2) дуг δ''_1, δ''_2 эквивалентны в том и только том случае, когда $\delta_{v_1, v_2} \simeq_{\partial} \delta_{v'_1, v'_2}$ (последнее равносильно равенству $g_{v_1, v_2} = g_{v'_1, v'_2}$); поэтому указанное сопоставление индуцирует инъективное сопоставление целых чисел классам Нильсена точек пересечения пары дуг δ''_1, δ''_2 ; класс эквивалентности точки пересечения (v_1, v_2) будем называть g_{v_1, v_2} -м классом.

Рассмотрим описанное выше сопоставление целых чисел классам Нильсена точек пересечения пары дуг δ''_1, δ''_2 (соответственно

пары дуг δ_2'', δ_1''). Тогда существенным классам сопоставляются числа $1, 2, \dots, |k| - 1$ (соответственно числа $-1, -2, \dots, -(|k| - 1)$). При этом точке пересечения i -го класса пары (δ_1'', δ_2'') и точке пересечения $-(|k| - i)$ -го класса пары (δ_2'', δ_1'') отвечают две разные точки самопересечения кривой γ'' одного класса Нильсена $i \bmod |k|$ ($1 \leq i \leq |k| - 1$). Непосредственная проверка показывает, что такие две точки самопересечения кривой γ'' строго эквивалентны. Так как i – любое целое число в интервале $1 \leq i \leq |k| - 1$, то кривая γ'' имеет не менее $|k| - 1$ классов Нильсена точек самопересечения, причем в каждом классе не менее двух строго эквивалентных точек.

Шаг 4. В силу второй формулы леммы 1 (b) точки самопересечения, отвечающие рассматриваемым классам, нетривиальны, так как $k \nmid g_{v_1, v_2}$. Точка самопересечения (v_1, v_2) геометрически специальна (а потому и геометрически самосокащающая ввиду ориентируемости цилиндра), если $g_{v_1, v_2} = |k|/2$. Последнее выполнено при четном k для $|k|/2$ -го класса пары (δ_1'', δ_2'') и для $-|k|/2$ -го класса пары (δ_2'', δ_1'') , а потому при четном k существует геометрически специальный класс точек самопересечения кривой γ'' . Любая его точка (v_1, v_2) строго геометрически специальна (а потому и строго геометрически самосокащающая ввиду ориентируемости цилиндра), так как она строго эквивалентна точке (v_2, v_1) , см. выше.

Так как группа $\pi_1(C) = \mathbb{Z}$ абелева, число Райдемайстера $RI[\gamma]$ равно числу элементов факторгруппы группы \mathbb{Z} по подгруппе, порожденной числом k . Отсюда следует, что $RI[\gamma] = |k|$. \square

Л е м м а 3. Пусть $\gamma, \gamma_1, \gamma_2: S^1 \rightarrow M$ – замкнутые кривые на листе Мебиуса M , и пусть $k = \deg(\rho \circ \gamma) \neq 0$, $k_i = \deg(\rho \circ \gamma_i)$, где $\rho: M \rightarrow S^1$ – стандартное расслоение со слоем отрезок. Тогда $RI[\gamma] = |k|$,

$$MI[\gamma] = \begin{cases} |k| - 2, & 2 \mid k, \\ |k| - 1, & 2 \nmid k; \end{cases} \quad NI^*[\gamma] = NI[\gamma] = \begin{cases} 0, & 2 \mid k, \\ |k| - 1, & 2 \nmid k; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} MI[\gamma_1, \gamma_2] &= \begin{cases} 0, & \text{если } 2 \mid k_1 k_2, \\ \min\{|k_1|, |k_2|\}, & \text{если } 2 \nmid k_1 k_2; \end{cases} \\ NI^*[\gamma_1, \gamma_2] = NI[\gamma_1, \gamma_2] &= \begin{cases} 0, & \text{если } 2 \mid k_1 k_2, \\ \gcd(k_1, k_2), & \text{если } 2 \nmid k_1 k_2; \end{cases} \\ RI[\gamma_1, \gamma_2] &= \begin{cases} \infty, & \text{если } k_1 = k_2 = 0, \\ \gcd(k_1, k_2), & \text{если } |k_1| + |k_2| > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Если k нечетно, то выполнено свойство Векена, все классы Нильсена точек самопересечения строго дефективны и не являют-

ся геометрически специальными, а все классы кроме тривиального существенны (см. определение 1(b, c)).

Если k четно, то любой класс точек самопересечения несуществен (и даже недефективен и имеет полуиндекс 0); существует не менее $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$ классов Нильсена, каждый из которых не совпадает с тривиальным и содержит не менее двух (строго эквивалентных) точек самопересечения, хотя несуществен (и даже недефективен и имеет полуиндекс 0); в точности $\delta(k/2)$ из этих $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$ классов является геометрически специальным (и даже состоящим из строго геометрически самосокращающихся точек), см. (4) и определение 1 (b, c).

При четном $k_1 k_2$ выполнено свойство Векена, кривые γ_1, γ_2 гомотопны непересекающимся кривым, а все классы Нильсена недефективны (и несущественны). При нечетном $k_1 k_2$ кривые γ_1, γ_2 имеют в точности $\gcd(k_1, k_2)$ классов Нильсена точек пересечения; каждый из этих классов существен и содержит не менее $\frac{\min\{|k_1|, |k_2|\}}{\gcd(k_1, k_2)}$ точек пересечения, хотя дефективен.

С л е д с т в и е 2. В условиях леммы 3 для замкнутой кривой $\gamma: S^1 \rightarrow M$ на листе Мебиуса отличные от нуля полуиндексы классов геометрических точек самопересечения равны 1 и

$$MI_{\text{geom}}[\gamma] = \lfloor \frac{|k| - 1}{2} \rfloor, \quad RI_{\text{geom}}[\gamma] = \lfloor \frac{|k|}{2} \rfloor + 1,$$

$$NI_{\text{geom}}^*[\gamma] = NI_{\text{geom}}[\gamma] = \begin{cases} \delta(\frac{k}{2}), & \text{если } k \text{ четно,} \\ \frac{|k| - 1}{2}, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Если k нечетно, то выполнено свойство Векена, все классы Нильсена геометрических точек самопересечения строго дефективны, а все классы кроме тривиального существенны.

Если k четно, то кривая γ имеет не менее $\lfloor |k|/4 \rfloor$ классов геометрических точек самопересечения, отличных от тривиального; в точности $\delta(k/2)$ из этих классов является (строго) геометрически специальным (он существен и строго дефективен), а каждый из остальных $\lfloor (|k| - 2)/4 \rfloor$ классов содержит не менее двух (строго эквивалентных) геометрических точек, хотя несуществен (и даже недефективен и имеет полуиндекс 0). \square

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3. Пусть k четно. С использованием поднятия $\tilde{\gamma}$ кривой γ на двулистное накрытие $S \rightarrow M$ листа Мебиуса M цилиндром S , из леммы 2 получаем неравенство

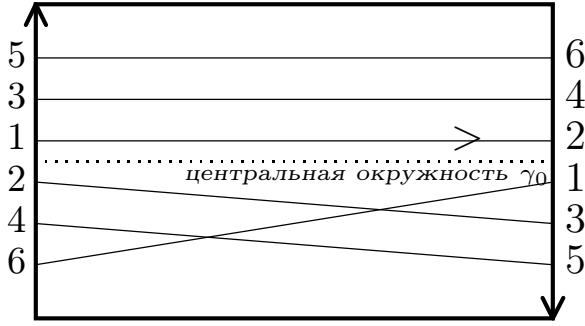


Рис. 3. Специальная кривая
 $\gamma \simeq \gamma_0^6$

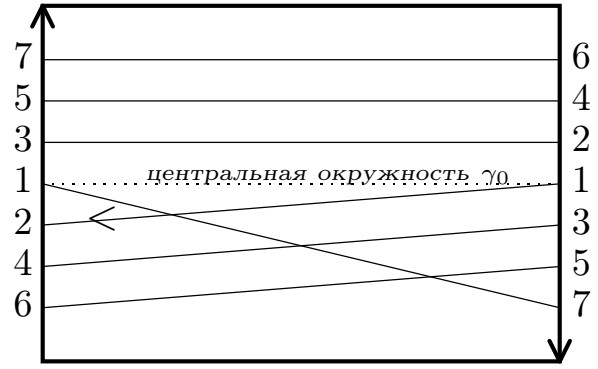


Рис. 4. Неспециальная кривая
 $\gamma \simeq \gamma_0^{-7}$

$MI[\gamma] \geq MI[\tilde{\gamma}] = |k| - 2$. Оно является равенством, что доказывается предъявлением подходящей кривой $\gamma' \simeq \gamma$, см. рис. 3. Так как γ сохраняет ориентацию, все классы Нильсена недефективны. Поскольку $MI[\gamma] = MI[\tilde{\gamma}]$, из свойств накрытий и из леммы 2 следуют равенства $NI[\gamma] = NI[\tilde{\gamma}] = 0$; равенство нулю полуиндексов всех классов Нильсена. Из леммы 2 получаем также существование не менее $|k|/2 - 1$ нетривиальных классов, каждый из которых недефективен и содержит не менее двух строго эквивалентных точек самопересечения; среди них существование в точности $\delta(k)$ геометрически специального класса; существенность этого класса и то, что его точки являются строго геометрически самосоокращающимися.

Пусть k нечетно. Покажем, что $MI[\gamma] = NI[\gamma] = |k| - 1$. Обозначим через γ_0 центральную окружность листа Мебиуса. Разъединим концы кривой γ и продеформируем ее в простую кривую γ' , идущую “параллельно” кривой γ_0 “по спирали”, как показано на рис. 4. При такой “намотке” кривая γ' обходит $|k| > 1$ раз вокруг γ_0 и, следовательно, остается незамкнутой. “Замкнем” кривую γ' коротким отрезком σ , пересекающим γ_0 в единственной точке $\gamma_0(v)$; получим замкнутую кривую $\gamma'' = \gamma' \cdot \sigma$, гомотопную γ , см. рис. 4. По построению (незамкнутые) кривые γ', σ не имеют точек самопересечения и пересекаются в $\frac{|k|-1}{2}$ точках, не считая концов. Так как все эти точки определяют точки самопересечения кривой γ'' , то кривая γ'' имеет $|k| - 1$ точек самопересечения. Покажем, что эти точки попарно неэквивалентны (а потому не являются геометрически специальными) и нетривиальны. Сопоставим этим точкам целые числа g_{v_1, v_2} аналогично шагу 2 доказательства леммы 2. Тогда попарная неэквивалентность следует из того, что $|k| - 1$ чисел $\pm 2, \pm 4, \dots, \pm(|k| - 1)$ попарно различны в факторгруппе $\mathbb{Z}/|k|\mathbb{Z}$, а нетривиальность — из того, что эти числа отличны от нуля в $\mathbb{Z}/|k|\mathbb{Z}$.

Каждая из этих точек является строго самосокращающей (а ее класс строго дефективным) ввиду ее специальности и того, что γ меняет ориентацию.

Пусть $k_1 k_2$ четно. Тогда одно из чисел k_1, k_2 четно, скажем, k_1 . Значит, кривая γ_1 гомотопна некоторой степени границы листа Мебиуса. Продеформируем кривую γ_1 к границе, а кривую γ_2 — к центральной окружности листа Мебиуса. Получим пару непересекающихся кривых, поэтому $MI[\gamma_1, \gamma_2] = NI[\gamma_1, \gamma_2] = 0$. Недефективность классов Нильсена следует из того, что одна из кривых γ_1, γ_2 сохраняет ориентацию.

Пусть $k_1 k_2$ нечетно. Разобьем доказательство на несколько шагов, аналогичных шагам доказательства леммы 2.

Шаг 1. Докажем равенство $MI[\gamma_1, \gamma_2] = \min\{|k_1|, |k_2|\}$. Рассмотрим пару кривых (γ'_1, γ'_2) , $\gamma'_1 \simeq \gamma_1$, $\gamma'_2 \simeq \gamma_2$, имеющих минимальное число точек пересечения, т.е. $MI[\gamma_1, \gamma_2]$ точек пересечения. Как в доказательстве леммы 2 (шаги 1 и 3), каждую пару кривых γ'_1, γ'_2 на листе Мебиуса, имеющую конечное число точек пересечения, можно продеформировать — с сохранением точек пересечения и их разбиения на классы Нильсена — так, чтобы одна из кривых γ'_1, γ'_2 имела общую точку с ∂M , а другая кривая лежала внутри M . Пусть для определенности $\gamma'_2(0) \in \partial M$, $\gamma'_1(t) \in M \setminus \partial M$. Рассмотрим ориентируемое двулистное накрытие $S = \tilde{M} \rightarrow M$ листа Мебиуса M цилиндром S , и пусть $\tilde{\gamma}_1, \delta_2$ — поднятия кривых $(\gamma'_1)^2, \gamma'_2$ на это накрытие. Тогда первая кривая $\tilde{\gamma}_1$ замкнута, лежит во внутреннейности $S = \tilde{M}$ и гомотопна k_1 -ой степени центральной окружности цилиндра S . Вторая кривая δ_2 не является замкнутой и ее концы $\delta_2(0), \delta_2(1)$ принадлежат разным компонентам края цилиндра $S = \tilde{M}$.

Рассмотрим задачу о минимальном числе $MI[\tilde{\gamma}_1, \delta_2]$ точек пересечения замкнутой кривой $\tilde{\gamma}_1$ и дуги δ'_2 на цилиндре в классах гомотопии замкнутой кривой $\tilde{\gamma}_1$ и дуги δ_2 с фиксированными концами (в процессе гомотопии концы дуги остаются неподвижными). Как и в задаче о пересечении двух дуг δ_1, δ_2 (см. шаг 1 доказательства леммы 2), в этой задаче справедливо свойство Векена, и минимальное число точек пересечения в данных классах гомотопии имеют кривые, являющиеся кратчайшими относительно некоторой плоской римановой метрики на цилиндре. Отсюда легко находим

$$MI[\tilde{\gamma}_1, \delta_2] = NI[\tilde{\gamma}_1, \delta_2] = |k_1|.$$

Следовательно, кривые $\tilde{\gamma}_1, \delta_2$ имеют не менее $|k_1|$ точек пересечения.

Так как разным точкам пересечения кривых $\tilde{\gamma}_1, \delta_2$ отвечают разные точки пересечения кривых γ'_1, γ'_2 , получаем неравенство

$MI[\gamma_1, \gamma_2] \geq MI[\tilde{\gamma}_1, \delta_2] = |k_1| \geq \min\{|k_1|, |k_2|\}$. Оно является равенством $MI[\gamma_1, \gamma_2] = \min\{|k_1|, |k_2|\}$, что доказывается путем предъявления подходящей пары кривых γ'_1, γ'_2 , имеющих ровно $|k_i| = \min\{|k_1|, |k_2|\}$ точек пересечения (например, $\gamma'_i = \gamma_0^{k_i}$, а γ'_{3-i} – любая кривая, гомотопная γ_{3-i} и пересекающая центральную окружность γ_0 листа Мебиуса в ровно одной точке).

Шаг 2. Для вычисления числа Нильсена $NI[\gamma_1, \gamma_2]$ при нечетном $k_1 k_2$ сопоставим каждой точке пересечения (v_1, v_2) кривых γ_1, γ_2 путь $\gamma_{v_1, v_2} = \gamma_1|_{[0, v_1]} \cdot \gamma_2|_{[0, v_2]}^{-1}$, начинающийся в точке $\gamma_1(0)$ и заканчивающийся в точке $\gamma_2(0)$. Гомотопический класс (относительно концов) этого пути обозначим через

$$g_{v_1, v_2} = [\gamma_{v_1, v_2}] \in \pi_1(C, \gamma_1(0), \gamma_2(0)) \cong \mathbb{Z}$$

и будем рассматривать как целое число. Из первой формулы леммы 1 (а) следует, что точки пересечения (v_1, v_2) и (v'_1, v'_2) эквивалентны в том и только том случае, когда число $g_{v_1, v_2} - g_{v'_1, v'_2}$ является целочисленной линейной комбинацией чисел k_1 и k_2 . Пусть для простоты $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Тогда классы Нильсена пары кривых γ_1, γ_2 находятся во взаимно-однозначном соответствии с образами чисел g_{v_1, v_2} при проекции группы \mathbb{Z} в группу $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, где $r = \gcd(k_1, k_2)$.

Обозначим через $\tilde{\gamma}_0$ центральную окружность цилиндра. Рассмотрим кратчайшую замкнутую кривую $\tilde{\gamma}'_1 = \tilde{\gamma}_0^{k_1}$ и кратчайшую дугу δ'_2 в классах гомотопии $\tilde{\gamma}'_1 \simeq \tilde{\gamma}_1$, $\delta'_2 \simeq_{\partial} \delta_2$ относительно какой-нибудь плоской римановой метрики на цилиндре, где в процессе гомотопии пути δ_2 его концы $\delta_2(0), \delta_2(1) \in \partial C$ предполагаются неподвижными, см. шаг 1. Тогда кривые $\tilde{\gamma}'_1, \delta'_2$ имеют $|k_1|$ точек пересечения; отвечающие им $|k_1|$ чисел g_{v_1, v_2} образуют множество $\{2, 4, \dots, 2|k_1|\}$.

Это множество распадается на r наборов из $\frac{|k_1|}{r}$ чисел в каждом, где числа каждого набора равны между собой в группе $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, а элементы разных наборов различны в $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$. Следовательно, для кривых γ'_1, γ'_2 число классов Нильсена точек пересечения равно $NI[\gamma_1, \gamma_2] = r = \gcd(k_1, k_2)$, и каждый класс Нильсена состоит из нечетного числа $\frac{|k_1|}{r}$ точек пересечения. Поэтому все классы Нильсена существенны. Классы Нильсена дефективны, так как они специальные и обе кривые γ_1, γ_2 меняют ориентацию.

Шаг 3. Формулы для $RI[\gamma]$ и $RI[\gamma_1, \gamma_2]$, а также то, что для любой пары кривых, гомотопных паре γ_1, γ_2 , каждый класс Нильсена точек пересечения содержит не менее $\frac{\min\{|k_1|, |k_2|\}}{\gcd(k_1, k_2)}$ точек, доказывается как в доказательстве леммы 2 (шаги 3 и 4). \square

§ 4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПАРЫ КРИВЫХ

Вводимое ниже определение мотивировано тем, что в задаче о (само)пересечении замкнутых кривых на поверхности свойство Векена выполнено для неспециальных кривых и неспециальных пар кривых, но оно нарушается для специальных кривых и специальных пар кривых, причем за счет специальных классов Нильсена (см. теоремы 1 и 2 ниже).

О п р е д е л е н и е 3. (а) Замкнутую кривую $\gamma: S^1 \rightarrow S$ на поверхности S назовем *специальной*, если γ сохраняет ориентацию, нестягиваема и гомотопна собственной степени некоторой замкнутой кривой γ_0 на S , т.е. $\gamma \simeq \gamma_0^k$ для некоторого числа $k \in \mathbb{Z}$, $|k| > 1$. Здесь и далее $\gamma_0^k(v) = \gamma_0(kv)$, $v \in S^1$.

(б) Пару замкнутых кривых $\gamma_1, \gamma_2: S^1 \rightarrow S$ на поверхности S назовем *специальной*, если обе кривые γ_1, γ_2 меняют ориентацию и гомотопны степеням одной и той же замкнутой кривой γ на S , т.е. $\gamma_1 \simeq \gamma^k$, $\gamma_2 \simeq \gamma^\ell$ для некоторых чисел $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

З а м е ч а н и е 3. (а) Связная поверхность S содержит специальную замкнутую кривую тогда и только тогда, когда ее фундаментальная группа бесконечна (т.е. когда $\chi(S) \leq 0$, т.е. S не гомеоморфна плоскости, сфере и проективной плоскости). Если $\chi(S) > 0$, то любая замкнутая кривая на S неспециальна и гомотопна собственной степени замкнутой кривой.

(б) Если либо S связна и $\chi(S) \geq 0$, либо кривая γ стягиваема (соответственно одна из кривых γ_1, γ_2 стягиваема), то все точки самопересечения и геометрические точки самопересечения (соответственно все точки пересечения) являются специальными, см. определение 1 (с).

Для остальных связных поверхностей S , $\chi(S) < 0$, любая кривая $\gamma \simeq \gamma_0^k$ имеет не более $|k|$ специальных (а потому не более $|k| - 1$ нетривиальных специальных) классов Нильсена точек самопересечения, а любая пара кривых $\gamma_1 \simeq \gamma_0^{k_1}, \gamma_2 \simeq \gamma_0^{k_2}$ имеет не более $\gcd(k_1, k_2)$ специальных классов Нильсена точек пересечения (здесь $k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$ и γ_0 — замкнутая кривая, не гомотопная собственной степени никакой замкнутой кривой на S). При этом специальные точки (само)пересечения — в точности те, которые поднимаются на накрытие поверхности S (гомеоморфное цилиндру или листу Мебиуса), отвечающее циклической подгруппе $Z_{\gamma_0} \subset \pi_1(S, \gamma_0(0))$, см. доказательства теорем 1 и 2.

(с) Можно показать, что если S — не бутылка Клейна, то для специальной точки самопересечения (v_1, v_2) кривые $\gamma(v_1 + \bar{t})$ и $\gamma(v_2 + \bar{t})$, $0 \leq t \leq 1$, гомотопны относительно концов; т.е. можно считать, что $p = q = 1$ (для бутылки Клейна $p = 1, q = \pm 1$). Если S — не бутылка Клейна и у пары замкнутых кривых γ_1, γ_2 на S имеется специальная точка пересечения, то $\gamma_1 \simeq \gamma_0^{k_1}$, $\gamma_2 \simeq \gamma_0^{k_2}$ для некоторых замкнутой кривой γ_0 и чисел $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

§ 5. ЗАДАЧА О САМОПЕРЕСЕЧЕНИИ КРИВЫХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Т е о р е м а 1. Пусть $\gamma: S^1 \rightarrow S$ — замкнутая кривая на поверхности S , не обязательно являющейся компактной. Тогда отличные от нуля полуиндексы классов Нильсена точек самопересечения кривой γ равны 1. Более того:

(а) Неспециальная кривая γ обладает свойством Векена для задачи о самопересечении:

$$MI[\gamma] = NI^*[\gamma] = NI[\gamma].$$

Если при этом $\gamma \simeq \gamma_0^k$, где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и кривая γ_0 негомотопна собственной степени никакой замкнутой кривой на S , то

$$MI[\gamma] = NI^*[\gamma] = NI[\gamma] = k^2 \cdot NI[\gamma_0] + |k| - 1$$

и ровно $|k| - 1$ существенных классов Нильсена точек самопересечения кривой γ являются специальными, причем эти классы отличны от тривиального, строго дефективны и не являются геометрически специальными (см. определение 1(b, c)).

(b) Специальная кривая γ гомотопна степени γ_0^k , $k \in \mathbb{Z}$, $|k| > 1$, где кривая γ_0 сохраняет ориентацию или k четно, причем γ_0 негомотопна собственной степени никакой замкнутой кривой на S . Положим $k' = k$, если γ_0 сохраняет ориентацию, и $k' = \frac{k}{2}$, если γ_0 меняет ориентацию. Тогда все классы точек самопересечения недефективны, все специальные классы несущественны и

$$MI[\gamma] = k^2 \cdot NI[\gamma_0] + 2(|k'| - 1), \quad NI^*[\gamma] = NI[\gamma] = k^2 \cdot NI[\gamma_0],$$

причем γ имеет не менее $|k'| - 1$ (строго) специальных классов точек самопересечения, каждый из которых не совпадает с тривиальным и содержит не менее двух (строго эквивалентных) точек, хотя несуществен (и даже недефективен и имеет полуиндекс 0);

в точности $\delta(k')$ из этих $|k'| - 1$ классов является геометрически специальным (и даже состоящим из строго геометрически самосокращающихся точек), см. (4) и определение 1 (b, c).

Согласно теореме 1, в задаче о самопересечении замкнутой кривой γ свойство Векена выполняется в точности для неспециальных кривых и для специальных кривых вида γ_0^2 , где кривая γ_0 меняет ориентацию и негомотопна собственной степени никакой замкнутой кривой.

С л е д с т в и е 3. В условиях теоремы 1 отличные от нуля полуиндексы классов Нильсена геометрических точек самопересечения равны 1;

(а) для неспециальной кривой $\gamma \simeq \gamma_0^k$ выполнено свойство Векена

$$MI_{\text{geom}}[\gamma] = NI_{\text{geom}}^*[\gamma] = NI_{\text{geom}}[\gamma] = k^2 \cdot NI_{\text{geom}}[\gamma_0] + \frac{|k| - 1}{2}$$

и ровно $\frac{|k|-1}{2}$ существенных классов специальных, причем эти классы строго специальные, строго дефективны и отличны от тривиального;

(b) для специальной кривой $\gamma \simeq \gamma_0^k$ выполнено

$$\begin{aligned} MI_{\text{geom}}[\gamma] &= k^2 \cdot NI_{\text{geom}}[\gamma_0] + |k'| - 1, \\ NI_{\text{geom}}^*[\gamma] = NI_{\text{geom}}[\gamma] &= k^2 \cdot NI_{\text{geom}}[\gamma_0] + \delta(k') \end{aligned}$$

и ровно $k^2 \cdot NI_{\text{geom}}[\gamma_0]$ существенных классов неспециальных, где $k' = k$, если γ_0 сохраняет ориентацию, и $k' = \frac{k}{2}$, если γ_0 меняет ориентацию, причем кривая γ имеет не менее $\lfloor |k'|/2 \rfloor$ (строго) специальных классов геометрических точек самопересечения, отличных от тривиального; в точности $\delta(k')$ из этих классов является (строго) геометрически специальным (он существует и строго дефективен), а каждый из остальных $\lfloor (|k'| - 1)/2 \rfloor$ классов содержит не менее двух (строго эквивалентных) геометрических точек, хотя несуществен (и даже недефективен и имеет полуиндекс 0). \square

Согласно следствию 3, свойство Векена для геометрических точек самопересечения выполнено в точности для неспециальных кривых, а также для специальных кривых вида γ_0^4 (γ_0 меняет ориентацию) и γ_0^2 , где γ_0 не гомотопна степени никакой замкнутой кривой на S .

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Если $S = \mathbb{R}P^2$ или кривая γ стягиваема, то она неспециальна, и требуемое свойство

$MI[\gamma] = NI[\gamma]$ для этой кривой очевидно. Поэтому будем считать, что S связна, $|\pi_1(S)| = \infty$ и кривая γ нестягиваема. Так как образ любой гомотопии кривой в S является компактным подмножеством в S , можно считать, что S является компактной поверхностью (с краем или без) и $\chi(S) \leq 0$. Известно, что в этом случае на S существует риманова метрика, у которой кривизна всюду неположительна и каждая компонента края является геодезической.

В силу допущенных предположений, существует замкнутая кривая γ_0 , не гомотопная собственной степени никакой замкнутой кривой на S , такая, что $\gamma \simeq \gamma_0^k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Пусть γ'_0 – кратчайшая кривая, гомотопная кривой γ_0 в S ; тогда γ'_0 является замкнутой геодезической (и наоборот: любая замкнутая геодезическая является кратчайшей замкнутой кривой в своем классе гомотопии). При этом в любой точке самопересечения геодезической γ'_0 ее ветви пересекаются трансверсально (иначе кривая γ_0 являлась бы собственной степенью другой геодезической). Далее будем обозначать кривую γ'_0 через γ_0 , и будем считать, что $\gamma = \gamma_0^k$.

Случай 1. Предположим, что $k = 1$, т.е. $\gamma = \gamma_0$. Если бы у γ существовала специальная точка самопересечения или две эквивалентные точки самопересечения (например, эквивалентные точки вида (v_1, v_2) и (v_2, v_1)), то существовали бы два поднятия $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ кривой γ в универсальную накрывающую поверхность \tilde{S} , имеющие две точки трансверсального пересечения, либо одно из поднятий $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ являлось бы замкнутой кривой. Это противоречит тому факту, известному еще Пуанкаре [25], что в полном односвязном римановом многообразии неположительной секционной кривизны все геодезические незамкнуты и любые две из них либо совпадают, либо имеют не более одной общей точки.

Следовательно, точки самопересечения кривой γ неспециальны, попарно неэквивалентны (в том числе точки вида (v_1, v_2) и (v_2, v_1)) и имеют ненулевые индексы ± 1 , а значит, все классы Нильсена существенны, нетривиальны и имеют полуиндекс 1. В частности, геодезическая γ имеет ровно $NI[\gamma]$ точек самопересечения (точки вида (v_1, v_2) и (v_2, v_1) считаются разными), откуда $MI[\gamma] \leq NI[\gamma]$. Следовательно, $MI[\gamma] = NI[\gamma]$ и среди существенных классов нет специальных (а потому нет тривиального).

Случай 2. Предположим, что $k > 1$. Пусть число точек самопересечения кривой γ_0 равно $2n$ (точки вида (v_1, v_2) и (v_2, v_1) считаются различными). Из доказательства случая 1 следует, что

$$MI[\gamma_0] = NI[\gamma_0] = 2n.$$

Как в доказательствах лемм 2 и 3, разъединим концы кривой γ и продеформируем ее в простую кривую γ' , которая идет “параллельно” кривой γ_0 “по спирали” (см. рис. 3, 4). При такой “намотке” кривая γ' обходит $k > 1$ раз вокруг γ_0 и, следовательно, остается незамкнутой. “Замкнем” кривую γ' коротким отрезком σ ; получим замкнутую кривую $\gamma'' = \gamma' \cdot \sigma$, гомотопную γ .

По построению (незамкнутая) кривая γ' имеет $k^2 \cdot NI[\gamma_0]$ точек самопересечения. Если бы одна из этих точек являлась специальной точкой самопересечения кривой γ'' или две из этих точек были эквивалентны, то геодезическая γ_0 имела бы либо специальную точку самопересечения, либо тривиальную точку самопересечения, либо две эквивалентные точки самопересечения, что противоречит доказанному в случае 1. По построению (незамкнутая) кривая σ не имеет точек самопересечения и пересекает (незамкнутую) кривую γ' в

$$N := \begin{cases} \frac{k-1}{2}, & \text{если } \gamma - \text{неспециальная,} \\ k' - 1, & \text{если } \gamma - \text{специальная,} \end{cases}$$

точках, причем все эти точки определяют специальные точки самопересечения кривой $\gamma'' = \gamma' \cdot \sigma$. Следовательно, кривая γ'' имеет $k^2 \cdot NI[\gamma_0] + 2N$ точек самопересечения, из которых $k^2 \cdot NI[\gamma_0]$ точек неспециальны и попарно неэквивалентны, а остальные $2N$ точек специальные.

В случае (а) осталось показать, что специальные точки кривой γ'' тоже попарно неэквивалентны, а также нетривиальны и строго дефективны. Отсюда будет, в частности, следовать, что среди существующих классов Нильсена имеется ровно $k^2 \cdot NI[\gamma_0]$ неспециальных и $2N = k - 1$ специальных классов, причем нет тривиального класса и что $MI[\gamma] = NI[\gamma] = k^2 \cdot NI[\gamma_0] + k - 1$. В случае (b) осталось показать, что любая кривая, гомотопная γ , имеет не менее $k' - 1$ нетривиальных специальных классов Нильсена точек самопересечения, каждый из которых содержит не менее двух (строго эквивалентных) точек, недефективен и имеет полуиндекс 0, причем в точности $\delta(k')$ из этих $|k'| - 1$ классов состоит из строго геометрически самосокращающих точек.

Пусть $*$ = $\gamma_0(0)$ – базисная точка поверхности S , $[\gamma_0] \in \pi_1(S, *)$ – гомотопический класс кривой γ_0 в S , и пусть $p: \tilde{S} \rightarrow S$ – накрытие поверхности S с базисной точкой $\tilde{*} \in p^{-1}(*)$, отвечающее циклической подгруппе $p_{\#}\pi_1(\tilde{S}, \tilde{*}) = \langle [\gamma_0] \rangle$ фундаментальной группы $\pi_1(S, *)$ с образующей $[\gamma_0]$. Обозначим через P цилиндр, если γ_0 сохраняет ориентацию, или лист Мебиуса, если γ_0 меняет ориентацию. Поскольку $\chi(S) \leq 0$, в $\pi_1(S, *)$ нет элементов конечного порядка; значит,

$\pi_1(\tilde{S}, *) \approx \mathbb{Z}$ и \tilde{S} гомеоморфно поверхности $P \setminus B$ без некоторого подмножества края $B \subset \partial P$, причем поднятие $\tilde{\gamma}_0$ кривой γ_0 в \tilde{S} является центральной окружностью P . Так как кривая γ_0 допускает поднятие $\tilde{\gamma}_0$, то гомотопия $\gamma_0^k \simeq \gamma''$ допускает поднятие $(\tilde{\gamma}_0)^k \simeq \tilde{\gamma}''$. Ясно, что если точка самопересечения кривой γ'' “поднимается”, то она является специальной и все эквивалентные ей точки самопересечения тоже “поднимаются” и определяют специальные точки самопересечения кривой $\tilde{\gamma}''$. Как следует из свойств накрытий, тривиальность (или эквивалентность) этих точек по отношению к “поднятой” кривой $\tilde{\gamma}''$ равносильна их тривиальности (соответственно эквивалентности) по отношению к самой кривой γ'' .

(а) Поэтому достаточно показать, что точки самопересечения “поднятой” кривой $\tilde{\gamma}''$ на листе Мебиуса попарно неэквивалентны, а также нетривиальны и строго дефективны — это следует из леммы 3. Поэтому

$$MI[\gamma] = NI[\gamma] = k^2 \cdot NI[\gamma_0] + k - 1.$$

(b) Достаточно показать, что любая кривая на P , гомотопная $\tilde{\gamma}''$, имеет не менее $k' - 1$ нетривиальных классов Нильсена точек самопересечения, каждый из которых содержит не менее двух (строго эквивалентных) точек, недефективен и имеет полуиндекс 0, причем в точности $\delta(k')$ из этих $|k'| - 1$ классов состоит из строго геометрически самосокращающих точек. Это следует из лемм 2 и 3 для сохраняющей ориентацию кривой γ . \square

§ 6. ЗАДАЧА О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПАР КРИВЫХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Т е о р е м а 2. Пусть $\gamma_1, \gamma_2: S^1 \rightarrow S$ — две замкнутые кривые на поверхности S , которая не обязательно компактна. Отличные от нуля полуиндексы классов Нильсена точек пересечения равны 1.

(а) Пусть (γ_1, γ_2) — неспециальная пара. Тогда все существенные классы Нильсена точек пересечения кривых γ_1, γ_2 являются неспециальными и выполняется свойство Векена для задачи о пересечении

$$MI[\gamma_1, \gamma_2] = NI^*[\gamma_1, \gamma_2] = NI[\gamma_1, \gamma_2].$$

Если $\gamma_1 \simeq \gamma^k$, $\gamma_2 \simeq \gamma^\ell$, где $k, \ell \in \mathbb{Z}$ и кривая γ негомотопна собственной степени никакой замкнутой кривой на S , то

$$MI[\gamma_1, \gamma_2] = NI^*[\gamma_1, \gamma_2] = NI[\gamma_1, \gamma_2] = |k \cdot \ell| \cdot NI[\gamma].$$

(b) Пусть (γ_1, γ_2) — специальная пара. Если $S = \mathbb{R}P^2$, то $\gamma_1 \simeq \gamma_2 \neq 0$,

$$MI[\gamma_1, \gamma_2] = NI^*[\gamma_1, \gamma_2] = NI[\gamma_1, \gamma_2] = 1$$

и все точки пересечения образуют существенный специальный (и даже дефективный) класс Нильсена. Если $S \neq \mathbb{R}P^2$, то $\gamma_1 \simeq \gamma^k$, $\gamma_2 \simeq \gamma^\ell$, где числа $k, \ell \in \mathbb{Z}$ нечетны, а замкнутая кривая γ меняет ориентацию и негомотопна собственной степени никакой замкнутой кривой на S ; при этом

$$\begin{aligned} MI[\gamma_1, \gamma_2] &= |k \cdot \ell| \cdot NI[\gamma] + \min\{|k|, |\ell|\}, \\ NI^*[\gamma_1, \gamma_2] = NI[\gamma_1, \gamma_2] &= |k \cdot \ell| \cdot NI[\gamma] + \gcd(k, \ell) \end{aligned}$$

и ровно $\gcd(k, \ell)$ существенных классов точек пересечения кривых γ_1, γ_2 являются специальными; каждый из этих классов содержит не менее $\frac{\min\{|k_1|, |k_2|\}}{\gcd(k_1, k_2)}$ точек пересечения, хотя дефективен.

Согласно теореме 2, в задаче о пересечении замкнутых кривых свойство Векена нарушается в точности для тех специальных пар кривых, где никакая из кривых негомотопна степени другой кривой, причем нарушение свойства Векена происходит за счет специальных существенных классов Нильсена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай, когда одна из кривых γ_1, γ_2 стягиваема, очевиден: пара неспециальна и $MI[\gamma_1, \gamma_2] = NI[\gamma_1, \gamma_2] = 0$. Поэтому можно считать, что $\pi_1(S) \neq 0$ и что обе кривые нестягиваемы. Если $S = \mathbb{R}P^2$ и $\gamma_1 \simeq \gamma_2 \neq 0$, то пара является специальной и равенство $MI[\gamma_1, \gamma_2] = NI[\gamma_1, \gamma_2] = RI[\gamma_1, \gamma_2] = 1$ очевидно; кроме того, легко проверяется, что все точки пересечения дефективны и попарно эквивалентны по Нильсену. Поэтому далее считаем, что $|\pi_1(S)| = \infty$ и что обе кривые нестягиваемы.

Так как образ любой гомотопии является компактным связным подмножеством в S , можно считать, что S является компактной связной поверхностью (с краем или без) и, в силу допущенных предположений, $\chi(S) \leq 0$. Известно, что в этом случае на S существует риманова метрика, у которой кривизна всюду неположительна и каждая компонента края является геодезической. Пусть γ'_1, γ'_2 — кратчайшие кривые, гомотопные кривым γ_1, γ_2 в S ; тогда γ'_1, γ'_2 являются замкнутыми геодезическими (и наоборот: любая замкнутая геодезическая является кратчайшей замкнутой кривой в своем классе гомотопии). Далее будем обозначать γ'_1, γ'_2 через γ_1, γ_2 соответственно. Рассмотрим два случая:

Случай 1. Предположим, что не существует замкнутой кривой γ на S и чисел $k, \ell \in \mathbb{Z}$, таких, что $\gamma_1 \simeq \gamma^k$, $\gamma_2 \simeq \gamma^\ell$. Тогда пара

(γ_1, γ_2) неспециальна и геодезические γ_1, γ_2 пересекаются трансверсально в любой точке пересечения. Если бы существовала специальная точка пересечения или две эквивалентные точки пересечения, то поднятия $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ кривых γ_1, γ_2 в универсальную накрывающую поверхность \tilde{S} имели бы две точки трансверсального пересечения. Последнее противоречит тому факту, что любые две геодезические в односвязном римановом многообразии неположительной секционной кривизны либо совпадают, либо имеют не более одной общей точки. Следовательно, $MI[\gamma_1, \gamma_2] = NI[\gamma_1, \gamma_2]$, все существенные классы Нильсена неспециальны и имеют полуиндекс 1.

Случай 2. Предположим, что $\gamma_1 \simeq \gamma^k$, $\gamma_2 \simeq \gamma^\ell$ для некоторой замкнутой кривой γ на S и чисел $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Можно считать, что γ является геодезической и не гомотопна собственной степени никакой замкнутой кривой на S , и $\gamma_1 = \gamma^k$, $\gamma_2 = \gamma^\ell$. Пусть число точек самопересечения геодезической γ равно $2n$ (точки вида (v_1, v_2) и (v_2, v_1) считаются различными). Из доказательства теоремы 1 (а) следует, что

$$MI[\gamma] = NI[\gamma] = 2n$$

и все точки самопересечения кривой γ неспециальны и попарно неэквивалентны (в частности, неэквивалентны точки вида (v_1, v_2) и (v_2, v_1)).

(а) Пусть (γ_1, γ_2) – неспециальная пара. Тогда либо кривая γ сохраняет ориентацию, либо одно из чисел k, ℓ четно, скажем ℓ . Поэтому можно сдвинуть кривую γ_2 в “нормальном” к γ направлении, так, чтобы новая замкнутая кривая γ'_2 шла “параллельно” γ . Тогда γ_1 и γ'_2 имеют $|k\ell| \cdot 2n$ точек пересечения. Если бы γ_1 и γ'_2 имели специальную точку пересечения или две различные эквивалентные точки пересечения, то кривая γ имела бы либо специальную точку самопересечения, либо две эквивалентные точки самопересечения (например, эквивалентные точки вида (v_1, v_2) и (v_2, v_1)), противоречие. Следовательно, все точки пересечения кривых γ_1, γ'_2 неспециальны, попарно неэквивалентны и имеют полуиндексы 1. Значит,

$$MI[\gamma_1, \gamma_2] = NI[\gamma_1, \gamma_2] = |k \cdot \ell| \cdot NI[\gamma]$$

и среди существенных классов нет специальных.

(б) Пусть (γ_1, γ_2) – специальная пара. Тогда γ меняет ориентацию, а числа k, ℓ нечетны. Пусть для определенности $|k| \leq |\ell|$.

Как в доказательстве леммы 3 и теоремы 1, разъединим концы кривой γ_2 и сдвинем ее в “нормальном” к γ направлении так, чтобы новая (незамкнутая) кривая γ'_2 шла “параллельно” γ , при этом

начальной точкой на кривой γ выбирается точка $\gamma(v)$, являющаяся образом лишь одного значения $v \in S^1$ при отображении γ . При таком “сдвиге” кривая γ'_2 обходит вдоль γ нечетное число раз $|\ell|$ и, следовательно, остается незамкнутой. “Замкнем” кривую γ'_2 коротким отрезком σ , пересекающим γ в единственной точке $\gamma(v)$; получим замкнутую кривую $\gamma''_2 = \gamma'_2 \cdot \sigma$.

По построению кривые γ_1 и γ'_2 имеют $|k \cdot \ell| \cdot 2n$ точек пересечения. Если бы одна из этих точек являлась специальной точкой пересечения кривых γ_1, γ''_2 или две из этих точек были эквивалентны, то геодезическая γ имела бы либо специальную точку самопересечения, либо две эквивалентные точки самопересечения (например, две эквивалентные точки вида (v_1, v_2) и (v_2, v_1)), противоречие. По построению кривые γ_1 и σ имеют $|k|$ точек пересечения, причем все они являются специальными (и даже самосокращающимися, см. определение 1 (с)) точками пересечения кривых γ_1, γ''_2 . Таким образом, кривые γ_1 и $\gamma''_2 = \gamma'_2 \cdot \sigma$ имеют ровно $|k \cdot \ell| \cdot 2n + |k|$ точек пересечения, из которых $|k \cdot \ell| \cdot 2n$ точек неспециальны и попарно неэквивалентны по Нильсену, а остальные $|k| = \min\{|k|, |\ell|\}$ точек специальные.

Ниже мы покажем, что кривые γ_1, γ''_2 имеют ровно $\gcd(k, \ell)$ специальных существенных классов Нильсена точек пересечения, причем любая пара кривых, гомотопная (γ_1, γ''_2) , имеет не менее $\frac{|k|}{\gcd(k, \ell)}$ точек пересечения в каждом специальном существенном классе Нильсена. Этим будут доказаны формулы для $MI[\gamma_1, \gamma_2]$ и $NI[\gamma_1, \gamma_2]$, а также все остальные требуемые утверждения.

Пусть $* = \gamma(0)$ – базисная точка поверхности S , $[\gamma] \in \pi_1(S, *)$ – гомотопический класс кривой γ в S , и пусть $p: \tilde{S} \rightarrow S$ – накрытие поверхности S с базисной точкой $\tilde{*} \in p^{-1}(*)$, отвечающее циклической подгруппе $p_{\#}\pi_1(\tilde{S}, \tilde{*}) = \langle [\gamma] \rangle$ фундаментальной группы $\pi_1(S, *)$ с образующей $[\gamma]$. Обозначим через $\tilde{\gamma}$ поднятие кривой γ в \tilde{S} . Заметим, что \tilde{S} гомеоморфно листу Мебиуса $M \setminus B$ без некоторого подмножества его края $B \subset \partial M$, причем кривая $\tilde{\gamma}$ является центральной окружностью листа Мебиуса M .

Рассмотрим поднятия $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}''_2$ кривых γ_1, γ''_2 на накрывающую поверхность $\tilde{S} = M \setminus B$, лежащую в листе Мебиуса M . Из леммы 3 следует, что кривые $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}''_2$ имеют ровно $\gcd(k, \ell)$ существенных (и дефективных) классов Нильсена точек пересечения. Заметим, что если точка пересечения кривых γ_1, γ''_2 является (самосокращающей) точкой пересечения “поднятых” кривых $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}''_2$, то она является специальной (и самосокращающей) и все эквивалентные ей точки пересечения тоже “поднимаются” и имеют такие же индексы, причем эквивалент-

ность этих точек по отношению к “поднятым” кривым $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2''$ равносильна их эквивалентности по отношению к самим кривым γ_1, γ_2'' , откуда полуиндекс любого класса Нильсена для пары $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2'')$ совпадает с его полуиндексом для пары (γ_1, γ_2'') . Следовательно, γ_1, γ_2'' имеют не менее $\gcd(k, \ell)$ специальных существенных (и дефективных) классов Нильсена точек пересечения. По свойствам накрытий любые кривые γ_1', γ_2''' , гомотопные кривым γ_1, γ_2'' в S , допускают поднятие в \tilde{S} ; при этом “поднятые” кривые $\tilde{\gamma}_1', \tilde{\gamma}_2'''$ гомотопны кривым $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2''$ в \tilde{S} . По лемме 3 любая пара кривых, гомотопных $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2'')$ на листе Мебиуса M , имеет не менее $\frac{\min\{|k|, |\ell|\}}{\gcd(k, \ell)}$ точек пересечения в каждом существенном классе Нильсена. В частности, “поднятая” пара $(\tilde{\gamma}_1', \tilde{\gamma}_2''')$ на \tilde{S} имеет не менее $\frac{\min\{|k|, |\ell|\}}{\gcd(k, \ell)}$ точек пересечения в каждом существенном классе Нильсена. Следовательно, исходная пара кривых (γ_1', γ_2''') на S имеет не менее $\gcd(k, \ell)$ специальных существенных классов Нильсена точек пересечения, каждый из которых содержит не менее $\frac{\min\{|k|, |\ell|\}}{\gcd(k, \ell)}$ точек пересечения, дефективен и имеет полуиндекс 1.

Как показано выше, среди существенных классов Нильсена имеется ровно $|k \cdot \ell| \cdot NI[\gamma]$ неспециальных классов. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. С.А. Богатый, Е.А. Кудрявцева, Х. Цишанг, О точках совпадения отображений тора в поверхность, Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова **247** (2004), 15–34.
2. J. Nielsen, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I, II, III, Acta Math. **50** (1927), 189–358; **53** (1929), 1–76; **58** (1932), 87–167.
3. R. Dobrenko, J. Jezierski, The coincidence Nielsen number on nonorientable manifolds, Rocky Mount. J. Math. **23** (1993), 67–87.
4. J. Jezierski, The semi-index product formula, Fund. Math. **140** (1992), 99–120.
5. F. Wecken, Fixpunktklassen, I, II, III, Math. Ann. **117** (1941), 659–671; **118** (1942), 216–234; **118** (1942), 544–577.
6. С.А. Богатый, Д.Л. Гонсалвес, Е.А. Кудрявцева, Х. Цишанг, Минимальное число прообразов при отображениях между поверхностями, Мат. Заметки **75:1** (2004), 13–19.
7. S. Bogatyĭ, D.L. Gonçalves, E. Kudryavtseva, H. Zieschang, On the Wecken property for the root problem of mappings between surfaces, Moscow Math. J. **3**, no. 4 (2003), 1223–1245.
8. D.L. Gonçalves, E.A. Kudryavtseva, H. Zieschang, Roots of mappings on nonorientable surfaces and equations in free groups, Manuscr. math. **107**, no. 3 (2002), 311–341.
9. R. Dobrenko, Z. Kucharski, On the generalization of the Nielsen number, Fund. Math. **134**, no. 1 (1990), 1–14.

10. *C. McCord*, A Nielsen theory for intersection numbers, *Fund. Math.* **152** (1997), 117-150.
11. *M.A. Kervaire*, Geometric and algebraic intersection numbers, *Math. Ann.* **103** (1930), 347-358.
12. *C.T.C. Wall*, Surgery on compact manifolds. London: Academic Press 1970.
13. *J. Milnor*, Lectures on the h -cobordism theorem, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1965.
14. *B. Jiang*, Fixed points and braids, *Invent. Math.* **75** (1984), 69-74.
15. *B. Jiang*, Fixed points and braids II, *Math. Ann.* **272** (1985), 249-256.
16. *H. Hopf*, Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten II, *Math. Ann.* **Bd. 102** (1930), 562-623.
17. *B. Jiang*, Fixed points of surface homeomorphisms, *Bull. Amer. Math. Soc.* **5** (1981), 176-178.
18. *Н.В. Иванов*, Числа Нильсена отображений поверхностей, *Зап. науч. сем. ЛОМИ* **122** (1982), 56-65.
19. *J. Jezierski*, The coincidence Nielsen number for maps into the real projective space, *Fund. Math.* **140** (1992), 121-136.
20. *J. Jezierski*, The least number of coincidence points on surfaces, *J. Austr. Math. Soc. A.* **58** (1995), 27-38.
21. *R.B.S. Brooks, R.F. Brown, J. Pak, D.H. Taylor*, Nielsen numbers of maps of tori, *Proc. Amer. Math. Soc.* **52** (1975), 398-400.
22. *H. Whitney*, The selfintersection of a smooth n -manifold in $2n$ -space, *Ann. Math.* **45** (1944), 220-246.
23. *K.S. Sarkaria*, Kuratowski complexes, *Topology* **30** (1991), 67-76.
24. *M.A. Kervaire, J.W. Milnor*, On 2-spheres in 4-manifolds, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **47** (1961), 1651-1657.
25. *H. Poincaré*, Cinquième complément à l'analysis situs, *Oevres de Henri Poincaré*, vol. VI, 435-498.
26. *В.Г. Тупаев, О.Я. Виро*, Пересечения петель в двумерных многообразиях. II. Свободные петли, *Мат. Сборник*, **121(163)** (1983), 350-369; англ. пер. *V.G. Turaev, O.Ya. Viro*, Intersections of loops in two-dimensional manifolds. II. Free loops, *Math. USSR Sb.* **49** (1984), 357-366.
27. *P. Cahn*, A generalization of the Turaev cobracket and the minimal self-intersection number of a curve on a surface. arXiv:1004.0532v3 [math.GT]
28. *P. Cahn, V. Chernov*, Intersection of loops and the Andersen-Mattes-Reshetikhin algebra. arXiv:1105.4638v1 [math.GT]
29. *B. Reinhardt*, The winding number on two-manifolds, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **10** (1960), 271-283.
30. *H. Zieschang*, Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen, *Math. Scand.* **17** (1965), 17-40; II, *Math. Scand.* **25** (1969), 49-58.
31. *D.R.J. Chillingworth*, Winding numbers on surfaces. II, *Math. Ann.* **199** (1972), 131-153.
32. *J.S. Birman, C. Series*, An algorithm for simple closed curves on surfaces, *J. London Math. Soc.* (2) **29** (1984), 331-342.
33. *M. Cohen, M. Lustig*, Paths of geodesics and geometric intersection numbers. In: Combinatorial group theory and topology (ed. S.M. Gersten and J.R. Stallings), *Ann. Math. Studies* **111** (1987), 479-500.
34. *M. Lustig*, Paths of geodesics and geometric intersection numbers: II. In: Combinatorial group theory and topology (ed. S.M. Gersten and J.R. Stallings),

-
- Ann. Math. Studies **111** (1987), 501-543.
- 35. *В.Г. Тупаев*, Пересечения петель в двумерных многообразиях, Мат. Сборник, **106(148)** (1978), 566-588; англ. пер. Math. USSR Sb. **35** (1979), 229-250.
 - 36. *D.L. Gonçalves, E.A. Kudryavtseva, H. Zieschang*, Intersection index of curves on surfaces and applications to quadratic equations in free groups, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, Supp. **IL** (2001), 339-400.
 - 37. *D.L. Gonçalves, E.A. Kudryavtseva, H. Zieschang*, An algorithm for minimal number of intersection points of curves on surfaces, Proc. Seminar on Vector and Tensor Analysis **26** (2005), 139-167.
 - 38. *B. Schneiderman, P. Teichner*, Higher order intersection numbers of 2-spheres in 4-manifolds, Algebraic and Geometric Topology **1** (2000), 1-29.
<http://xxx.lanl.gov/abs/math.GT/0008048>